SESIONES ESPECIALES

Congreso RSME 2013

S14
Geometría Algebraica

Mie 23, 11:00 - 11:40, Aula 3 – Orlando Villamayor:
Multiplicidad, morfismos finitos, y resolución de singularidades

Mie 23, 11:45 - 12:25, Aula 3 – Luis Solá Conde:
Positividad de fibrados tangentes y álgebras de Lie

Mie 23, 12:30 - 13:10, Aula 3 – Laura Costa:
The representation type of Segre varieties

Mie 23, 13:15 - 13:55, Aula 3 – Marta Casanellas:
Algebraic geometry for evolution

Mie 23, 17:00 - 17:40, Aula 3 – Adolfo Quirós:
Operadores diferenciales aritméticos y Teoría de Hodge no abeliana en característica positiva

Mie 23, 17:45 - 18:25, Aula 3 – José Ignacio Burgos:
Geometría aritmética de variedades tóricas

Mie 23, 18:30 - 19:10, Aula 3 – Fernando Pablos Romo:
Caracterización de funciones sobre curvas algebraicas en el grupo de ideles

Mie 23, 19:15 - 19:55, Aula 3 – Ana Cristina López Martín:
Asociadas de Fourier-Mukai de curvas elípticas singulares

Congreso de la Real Sociedad Matemática Española
Santiago de Compostela, 21–25 enero 2013

Multiplicidad, morfismos finitos, y resolución de singularidades.

Orlando Villamayor U.[1]

La multiplicidad es un entero que se le asigna a un punto de una variedad. Este invariante se introdujo inicialmente por métodos topológicos, en el que la variedad se interpreta, al menos localmente, como un cubrimiento ramificado de un espacio regular.

Esta misma formulación motivó la noción de morfismo transversal. Este es un tipo particular de morfismo finito, con propiedades que se expresan en términos de clausuras enteras de ideales, de ramificación, y de eliminación algebraica.

Discutiremos algunos de estos aspectos de la teoría de la multiplicidad, indicando por qué conduce a la resolución de singularidades por un camino diferente al seguido por Hironaka.

Keywords: Multiplicidad, clausura entera, álgebras de Rees.

MSC 2010: 14E15.

Referencias

[1] A. BRAVO, O. E. VILLAMAYOR U., Singularities in positive characteristic, stratification and simplification of the singular locus. *Adv. in Math.* **224** (4), pp. 1349-1418 (2010).

[2] M. HERRMANN, S. IKEDA, U. ORBANZ, *Equimultiplicity and Blowing up*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1988.

[3] H. HIRONAKA, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero I-II. *Ann. of Math.* **79** (2), pp. 109-326 (1964).

[4] J. LIPMAN, Equimultiplicity, reduction, and blowing up. *Commutative Algebra.* Editor: R.N.Draper, pp. 111-147. Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **68**, Dekker, New York (1982).

[5] O. VILLAMAYOR U., Equimultiplicity, Algebraic elimination, and blowing up. (Preprint)

[1]Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid
Ciudad Universitaria de Cantoblanco
28049 Madrid
villamayor@uam.es

Congreso de la Real Sociedad Matemática Española
Santiago de Compostela, 21–25 enero 2013

Positividad de fibrados tangentes y álgebras de Lie

Luis Solá Conde[1], **Roberto Muñoz**[1], **Gianluca Occhetta**[2], **Kiwamu Watanabe**[3]

Las distintas condiciones de positividad del fibrado tangente de una variedad compleja imponen restricciones severas sobre la misma, como establece la famosa prueba de Mori de la Conjetura de Hartshorne-Fraenkel. En esta charla discutiremos resultados recientes relacionados con la Conjetura de Campana-Peternell, extensión natural de la anterior.

Keywords: Variedades de Fano, positividad, homogeneidad, álgebras de Lie, Teoría Mori.

MSC 2010: 14E30, 14M17.

Referencias

[CP] F. CAMPANA, T. PETERNELL, Projective manifolds whose tangent bundles are numerically effective, *Math. Ann.* **289**, no.1, pp. 169–187 (1991).

[CP2] F. CAMPANA, T. PETERNELL, 4-folds with numerically effective tangent bundles and second Betti numbers greater than one, *Manuscripta Math.*, **79**, no.3-4, pp. 225–238 (1993).

[Ca] C. CASAGRANDE. Quasi-elementary contractions of Fano manifolds. *Compos. Math.*, **144**, pp. 1429–1460 (2008).

[DPS] J.P.DEMAILLY ; T. PETERNELL; M. SCHNEIDER Compact complex manifolds with numerically effective tangent bundles. *J. Alg. Geom.*, **3** no. 2, pp. 295–345 (1994).

[K] V.G. KAC, *Infinite Dimensional Lie Algebras: an Introduction*. Progress in Mathematics, vol. 44. Birkhauser, Boston, 1983.

[Ke] G.R. KEMPF, Linear systems on homogeneous spaces. *Ann. of Math. (2)*, **103**, no. 3, pp. 557–591 (1976).

[La] C.-H. LAU, Holomorphic maps from rational homogeneous spaces onto projective manifolds. *J. Alg. Geom.*, **18**, no. 2, pp. 223–256 (2009).

[Mok] N. MOK, On Fano manifolds with nef tangent bundles admitting 1-dimensional varieties of minimal rational tangents. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **354**, no.7, pp. 2639–2658 (2002).

[Mor] S. MORI, Projective manifolds with ample tangent bundles. *Ann. of Math.*, **110**, no. 3, pp- 593–606 (1979).

[MOS] R. MUÑOZ; G. OCCHETTA; L.E. SOLÁ CONDE, On rank 2 vector bundles on Fano manifolds. Preprint: *arXiv*:1104.1490v3 (2011).

[SW] L.E. SOLÁ CONDE; J.A. WIŚNIEWSKI, On manifolds whose tangent bundle is big and 1-ample. *Proc. London Math. Soc.* (3) **89**, no. 2, pp. 73–290 (2004).

[T] S.V. TSARANOV, Representation and classification of Coxeter monoids. *European J. Combin.*, **11**, no.2, pp. 189–204 (1990).

[W1] K. WATANABE, $\mathbf{P}^1$-bundles over projective manifolds of Picard number one which admit another smooth morphism of relative dimension one. Preprint: *arXiv*:1201.3558 (2012).

[W2] K. WATANABE, Fano 5-folds with nef tangent bundles and Picard numbers greater than one. Preprint :*arXiv*:1208.3302 (2012).

[1]Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Rey Juan Carlos
28933 Móstoles, Madrid
luis.sola@urjc.es

[2]Dipartimento di Matematica
Universitá di Trento
Via Sommarive 14 I-38123 Povo (TN), Italia.
gianluca.occhetta@unitn.it

[3]Graduate School of Science and Engineering
Saitama University
Shimo-Okubo 255, Sakura-ku Saitama-shi, 338-8570, Japón
kwatanab@rimath.saitama-u.ac.jp

Congreso de la Real Sociedad Matemática Española
Santiago de Compostela, 21–25 enero 2013

The representation type of Segre varieties

Laura Costa Farrás[1]

Mimicking an analogous trichotomy in Representation Theory, it has been proposed a classification of ACM projective varieties as finite, tame or wild according to the complexity of their associated category of ACM vector bundles. ACM varieties of finite representation type have been completely classified in a very short list and it remains a challenging problem to find out the representation type of many ACM projective varieties. In this talk we will focus our attention on Segre varieties and we will prove that all of them (unless the quadric surface in the 3-dimensional projective space) are of wild representation type. More precisely, we will see that they are the support of families of arbitrarily large dimension and rank of simple Ulrich (and hence ACM) vector bundles. The main results are part of a join work with R.M. Miró-Roig and J.F. Pons-Llopis.

Keywords: ACM and Ulrich Bundles, representation type, Segre varieties.

MSC 2010: 14J60.

References

[1] L. Costa; R.M. Miró-Roig; J. Pons-LLopis, The representation type of Segre varieties. *Advances in Math.* **230**(4-6), pp. 1995–2013 (2012).

[1]Departament d'Àlgebra i Geometria
Universitat de Barcelona
Gran Via de les Corts Catalanes, 585
08007 Barcelona
costa@ub.edu

Congreso de la Real Sociedad Matemática Española
Santiago de Compostela, 21–25 enero 2013

Algebraic geometry for evolution

Marta Casanellas[1], **Jesús Fernández-Sánchez**[1]

Many statistical models of evolution can be viewed as algebraic varieties. As a consequence, algebraic geometry has a lot to do in phylogenetic reconstruction. Indeed, the generators of the ideal of a statistical model of evolution should allow to determine the tree formed by a set of living species.

We will see how toric varieties, secant and joins of varieties arise naturally from evolutionary models. We will also see how an in-depth study of the geometry of the model leads to major improvements on the phylogenetic reconstruction methods based on algebraic geometry. We will show results based on [1] and [2].

Keywords: Evolutionary model, phylogenetic variety, phylogenetic invariant.

MSC 2010: 14J99, 92D15, 05C85.

References

[1] M. Casanellas, J. Fernández-Sánchez, Relevant phylogenetic invariants of evolutionary models. *J. de Mathématiques Pures et Appliquées* **96**(3), pp. 207–229 (2011).

[2] M. Casanellas, J. Fernández-Sánchez, A. Kedzierska, The space of phylogenetic mixtures of equivariant models, *Algorithms for Molecular Biology* **7**(33), (2012), doi:10.1186/1748-7188-7-33.

[1]Dpt. Matemàtica Aplicada I
Universitat Politècnica de Catalunya
ETSEIB. UPC
Avda. Diagonal 647
08028 Barcelona
marta.casanellas@upc.edu

Congreso de la Real Sociedad Matemática Española
Santiago de Compostela, 21–25 enero 2013

Operadores diferenciales aritméticos y Teoría de Hodge no abeliana en característica positiva

Adolfo Quirós[1]

En 1992, Carlos Simpson [3] estableció, sujeta a ciertas condiciones de estabilidad, una equivalencia entre la categoría de representaciones del grupo fundamental de una variedad de Kähler compacta X y la categoría de fibrados de Higgs sobre X. La correspondencia de Riemann-Hilbert nos dice que una representación del grupo fundamental de X puede verse como un fibrado localmente libre E dotado de una conexión integrable, y el principal resultado de Simpson, la descomposición de Hodge noabeliana, proporciona un isomorfismo entre la cohomología de de Rham de E y la cohomología del correspondiente complejo de Higgs que generaliza la descomposición de Hodge clásica.

Distintos autores han estudiado análogos p-ádicos o en característica positiva de la correspondencia de Simpson. Entre ellos está la teoría desarrollada por Arthur Ogus y Vladimir Vologodsky [2] en la que la p-curvatura desempeña en característica $p > 0$ el papel del campo de Higgs. Esta teoría les permitió demostrar un análogo de la descomposición de Hodge que generalizaba los resultados de Deligne–llusie.

Presentaremos nuestro trabajo en colaboración con Michel Gros y Bernard Le Stum, de la Université de Rennes I (Francia), en el que nos servimos de los operadores diferenciales aritméticos de nivel m introducidos por Berthelot para extender algunos de los resultados de Ogus–Vologodsky.

Sea S un esquema de característica positiva p y X un esquema liso sobre S. Empezaremos por definir la noción de p^m-curvatura y la usaremos para probar que los resultados de Masaharu Kaneda [1] sobre la condición de Azumaya (semi-lineal) de los anillos de operadores diferenciales se extienden a nivel m. Asumiendo que existe un levantado fuerte del morfismo de Frobenius módulo p^2, levantaremos también el llamado Frobenius dividido para, a partir de ello, construir una aplicación de Frobenius Φ en $\widehat{\mathcal{D}}_X^{(m)}$, el completado del anillo de operadores diferenciales de nivel m. Nuestro resultado básico dice que podemos hacerlo mejor y que, de hecho, estos datos determinan una excisión del completado central de este anillo de operadores diferenciales. Tras definir los *módulos de Higgs* ($\mathcal{O}_X$-módulos $\mathcal{E}$ dotados de una aplicación $\mathcal{O}_X$-lineal $\theta : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X$ tal que $\theta^{(1)} \circ \theta = 0$), no es difícil deducir del resultado básico que

Teorema (correspondencia de Simpson)**.** *Sea X un esquema liso sobre S de característica positiva p. Si existe un levantado fuerte módulo p^2 del iterado $m+1$-ésimo* *del Frobenius relativo de X, entonces hay una equivalencia entre las categorías de $\mathcal{D}_X^{(m)}$-módulos quasi-nilpotentes y de módulos de quasi-nilpotentes en X' dada por*

$$\mathcal{E} \mapsto (F_{X*}\mathcal{E})^{1-\Phi} \qquad y \qquad \mathcal{F} \mapsto F_X^* \mathcal{F},$$

donde $F_X : X \to X'$ es el iterado $m+1$-ésimo del Frobenius relativo y Φ es el Frobenius actuando sobre operadores diferenciales que hemos definido anteriormente.

Keywords: $\mathcal{D}$-module, Higgs field, connection, p-curvature, Frobenius.

MSC 2010: 14F30 (14F40).

Referencias

[1] M. KANEDA, Direct images of $\mathcal{D}$-modules in prime characteristic. *RIMS Kökyüroku* **1382**, pp. 154–170 (2004).

[2] A. OGUS; V. VOLOGODSKY, Nonabelian Hodge theory in characteristic p. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **106**, pp. 1–138 (2007).

[3] C. T. SIMPSON, Higgs bundles and local systems. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **75**, pp. 5–95 (1992).

[1]Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, módulo 17
Universidad Autónoma de Madrid
Ciudad Universitaria de Cantoblanco
28049 Madrid
adolfo.quiros@uam.es

Congreso de la Real Sociedad Matemática Española
Santiago de Compostela, 21–25 enero 2013

Geometría aritmética de variedades tóricas

José Ignacio Burgos[1]

En geometría algebraica, a una variedad tórica proyectiva X provista de un fibrado amplio se le asocia un polítopo Δ con vértices enteros. De este polítopo se pueden leer muchas de las propiedades algebro-geométricas de la variedad tórica y del fibrado. Por ejemplo, el grado viene dado por $\dim(X)! \times \operatorname{Vol}(\Delta)$ y una base del espacio de secciones globales está determinado por los puntos enteros contenidos en el polítopo Δ. En esta charla veremos como extender este diccionario entre geometría algebraica y combinatoria a propiedades aritméticas, mediante la introducción de la función techo. Este trabajo está hecho en colaboración con P. Philippon y M. Sombra y parcialmente con A. Moriwaki y J. Rivera-Letelier.

Keywords: Variedades tóricas, teoría de Arakelov, alturas.

MSC 2010: 14M25 (Primary) 14G40, 52A41.

Referencias

[1] J. I. Burgos Gil, P. Philippon, M. Sombra, Hauteur des sous-schémas toriques et dualité de Legendre-Fenchel, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **347**(11-12), pp. 589–594 (2009).

[2] J. I. Burgos Gil, P. Philippon, M. Sombra, Arithmetic geometry of toric varieties. Metrics, measures and heights, *arXiv:1105.5584* (2011).

[3] J. I. Burgos Gil, A. Moriwaki, P. Philippon, M. Sombra, Arithmetic positivity on toric varieties, *arXiv:1210.7692* (2012).

[1]Instituto de Ciencias Matemáticas
Nicolás Cabrera, n 13-15, Campus de Cantoblanco, UAM
28049 Madrid
burgos@icmat.es

Congreso de la Real Sociedad Matemática Española
Santiago de Compostela, 21–25 enero 2013

Caracterización de funciones sobre curvas algebraicas en el grupo de ideles

Fernando Pablos Romo[1]

Sea X una curva algebraica sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica arbitraria. Para cada punto cerrado $x \in X$, sea $\mathcal{O}_x$ su anillo local ("anillo de gérmenes de funciones en x"), sea $A_x = \hat{\mathcal{O}}_x$ su completación y sea $K_x = [\hat{\mathcal{O}}_x]_0$ el correspondiente cuerpo de fracciones.

Se define el anillo de adeles de X como

$$\mathbb{A}_X = \left\{ \begin{array}{l} (f_x) \in \prod_{x \in X} K_x \text{ tal que } f_x \in A_x \text{ salvo} \\ \text{para un número finito de puntos } x \end{array} \right\}$$

El grupo de ideles $\mathbb{I}_X$ es el grupo de elementos invertibles de $\mathbb{A}_X$. Si Σ_X es el cuerpo de funciones de X, se tiene que $\Sigma_X \hookrightarrow \mathbb{A}_X$ y, por tanto, el grupo de funciones invertibles Σ_X^* es un subgrupo del grupo de ideles $\mathbb{I}_X$.

El objetivo de la charla es mostrar la caracterización de Σ_X^* dentro del grupo de ideles, utilizando para ello una generalización de la Ley de Reciprocidad de Weil, como primer paso para caracterizar revestimientos sobre curvas algebraicas dentro del correspondiente grupo de ideles.

Keywords: Curva algebraica, ideles, reciprocidad.

MSC 2010: 14H05, 19F15

Referencias

[1] MUÑOZ PORRAS, J. M.; PABLOS ROMO, F., Generalized reciprocity laws. *Trans. Am. Math. Soc.* **360**(7), pp. 3473–3491 (2008).

[2] TATE, J., Residues of differentials on curves. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **1**, pp. 149–159 (1968).

[1]Departamento de Matemáticas
Universidad de Salamanca
Plaza de la Merced 1-4
37008 Salamanca
fpablos@usal.es

Congreso de la Real Sociedad Matemática Española
Santiago de Compostela, 21–25 enero 2013

Asociadas de Fourier-Mukai de curvas elípticas singulares

Ana Cristina López Martín[1]

El problema geométrico de encontrar las asociadas de Fourier-Mukai (Fourier-Mukai *partners*) de una variedad algebraica ha jugado un papel crucial en los últimos 25 años tanto en la geometría algebraica como en sus conexiones con la simetría especular. Fijada una variedad algebraica X, el problema consiste en encontrar todas las variedades algebraicas Y tales que las categorías derivadas $D(X)$ y $D(Y)$ son equivalentes. En este sentido, una conjetura importante es la de Kawamata [2, 3]: Si X es una variedad proyectiva únicamente con singularidades de tipo cociente, entonces el número de asociadas de Fourier-Mukai de X es finito. Para variedades lisas, la conjetura se ha demostrado en varios casos como los de curvas, superficies o variedades abelianas (ver por ejemplo [1]). Sin embargo, para variedades singulares apenas existen resultados en la literatura ([4]). En esta charla probaremos que, si X es una curva proyectiva Gorenstein de género aritmético 1 y dualizante trivial, entonces X también satisface la conjetura de Kawamata ya que, como sucede en el caso de una curva elíptica lisa, cualquier asociada de Fourier-Mukai de X es isomorfa a ella misma.

Keywords: Fourier-Mukai, equivalencias, degeneraciones de Kodaira.

MSC 2010: 18E30, 14F05, 14E30, 14H52.

Referencias

[1] C. BARTOCCI, U. BRUZZO, D. HERNÁNDEZ RUIPÉREZ, *Fourier-Mukai and Nahm Transforms in Geometry and Mathematical Physics*, Progr. Math., Birkhauser (2009).

[2] Y. KAWAMATA, D-equivalence and K-equivalence, *J. Differential Geom.*, **61**(1), pp. 147–171 (2002).

[3] Y. KAWAMATA, Derived Categories for toric varieties II, arXiv:1201.3460v2 (2012).

[4] D. HERNÁNDEZ RUIPÉREZ, A. C. LÓPEZ MARTÍN, AND F. SANCHO DE SALAS, Relative integral functors for singular fibrations and singular partners, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, **11**(3), pp. 597–625 (2009).

[1]Departamento de Matemáticas
Universidad de Salamanca
Plaza de la Merced 1-4
37008 Salamanca
anacris@usal.es