

## Tema 8

# Excitaciones colectivas

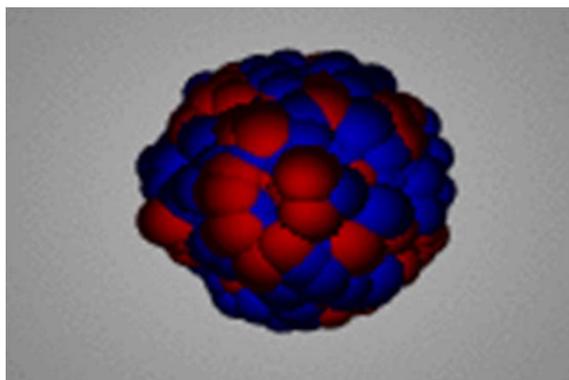
Asignatura de Física Nuclear

Curso académico 2012/2013

Universidad de Santiago de Compostela

# Las excitaciones colectivas

- En determinadas ocasiones a los núcleos les cuesta menos energía excitar varios nucleones. Un claro ejemplo son los núcleos par-par en los que el primer estado excitado corresponde a la excitación de dos nucleones
- Generalmente estas excitaciones colectivas dan lugar al movimiento coherente de varios nucleones dentro del núcleo que se manifiestan como un movimiento macroscópico del núcleo.
- El número de nucleones participantes y la amplitud de sus movimientos permiten clasificar a las excitaciones colectivas en vibraciones, resonancias o movimientos de gran amplitud como la fisión.
- El estudio de los movimientos colectivos nucleares constituyen otra aproximación para estudiar las interacciones a n-cuerpos y la fuerza nuclear



# Las excitaciones colectivas

---

En principio los conceptos de excitación individual y colectiva son contrapuestos:

- ✓ Excitaciones individuales  $\rightarrow \lambda > R$ , el recorrido libre medio de los nucleones es superior al radio nuclear
- ✓ Excitaciones colectivas  $\rightarrow \lambda < R$ , el recorrido libre medio de los nucleones es inferior al radio nuclear

Estas dos imágenes pueden reconciliarse recurriendo a la **aproximación adiabática**:

- ✓ Estos dos tipos de excitaciones tienen tiempos característicos muy diferentes (las excitaciones individuales son rápidas y las colectivas lentas) por lo que pueden describirse de forma independiente
- ✓ Esta descripción es análoga a la física atómica donde las moléculas diatómicas presentan excitaciones eléctricas (eV), vibraciones ( $10^{-1}$  eV) y rotaciones ( $10^{-3}$  eV) que se describen separadamente

# Indice

---

- 1. Evidencias experimentales de las excitaciones colectivas
  - 2 Vibraciones
    - 2.1 Vibraciones superficiales en núcleos esféricos
  - 3 Resonancias gigantes
    - 3.1 Características de las resonancias gigantes
    - 3.2 La resonancia dipolar gigante
    - 3.3 La resonancia monopolar gigante
  - 4 Rotación nuclear
    - 4.1 Movimiento de rotación
    - 4.2 Momento de inercia nuclear: modelo de "cranking"
    - 4.3 Modelo rotor+partículas: fenómeno de "backbending"
    - 4.4 Superdeformación
    - 4.5 Producción y estudio de núcleos con gran momento angular
  - 5 Fisión nuclear
    - 5.1 Modelo de la gota líquida para núcleos deformados: barrera de fisión
    - 5.2 Caracterización de la fisión

# Bibliografía

---

---

Bohr y B.R. Mottelson Nuclear Structure

M.A Preston Structure of the nucleus

L. Valentin Noyaux et particules

C.A. Bertulani y P. Danielewicz Introduction to Nuclear Reactions

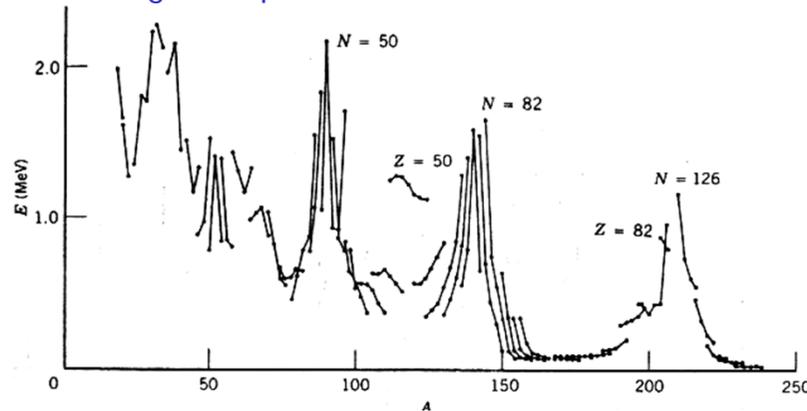
S.G. Nilsson, Shapes and Shells in Nuclear Structure

N.A. Jelley, Fundamentals of nuclear physics

# Evidencias experimentales de las excitaciones colectivas

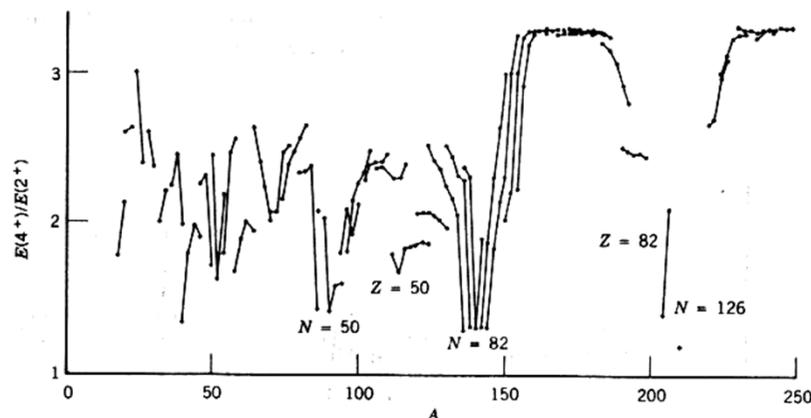
## Núcleos par-par

### Energía del primer estado excitado $2^+$



- La energía del primer estado excitado disminuye con  $A$  (excepto en las capas cerradas)
- Se observa un comportamiento especial para  $150 < A < 190$  con valores de  $E(2^+)$  pequeños y cte.

### Cociente de energías entre el segundo y el primer estado excitado $4^+ / 2^+$

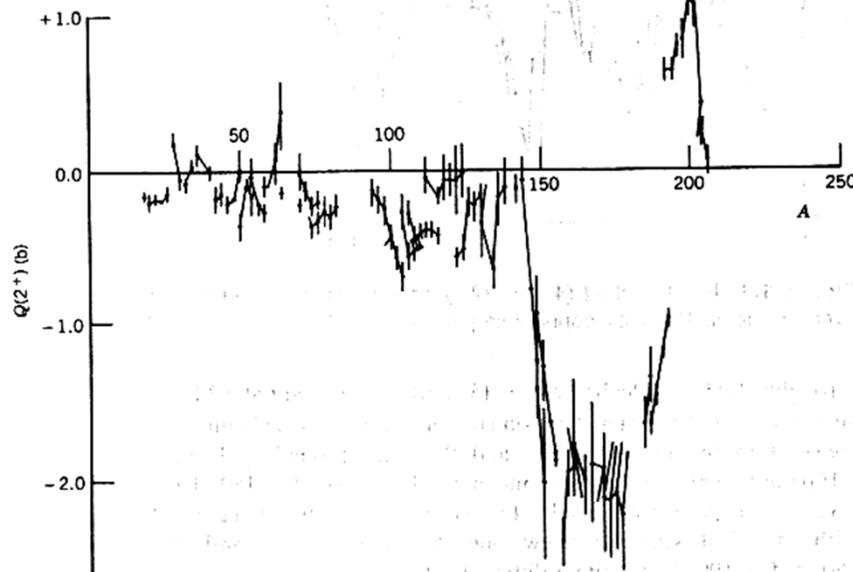


- Se observan dos regiones  $A < 150$  ( $E(4^+)/E(2^+) \sim 2$ ) y  $150 > A$  ( $E(4^+)/E(2^+) \sim 3.3$ ) (excepto en las capas cerradas).
- estos dos comportamientos se asocian a dos tipos de excitaciones colectivas diferentes

# Evidencias experimentales de las excitaciones colectivas

## Núcleos par-par

Momento cuadrupolar eléctrico de los primeros estados excitados  $2^+$



También se distinguen dos regiones

→  $A < 150$  con  $Q$  nulo

→  $150 < A < 190$  y  $A > 230$  con  $Q$  no nulo

Valores de  $Q$  no nulos → deformación

Las excitaciones asociadas a  $A < 150$  (núcleos esféricos) → vibraciones → único movimiento colectivo que mantiene la simetría radial

Las excitaciones asociadas a  $A > 150$  (núcleos deformados) → rotaciones

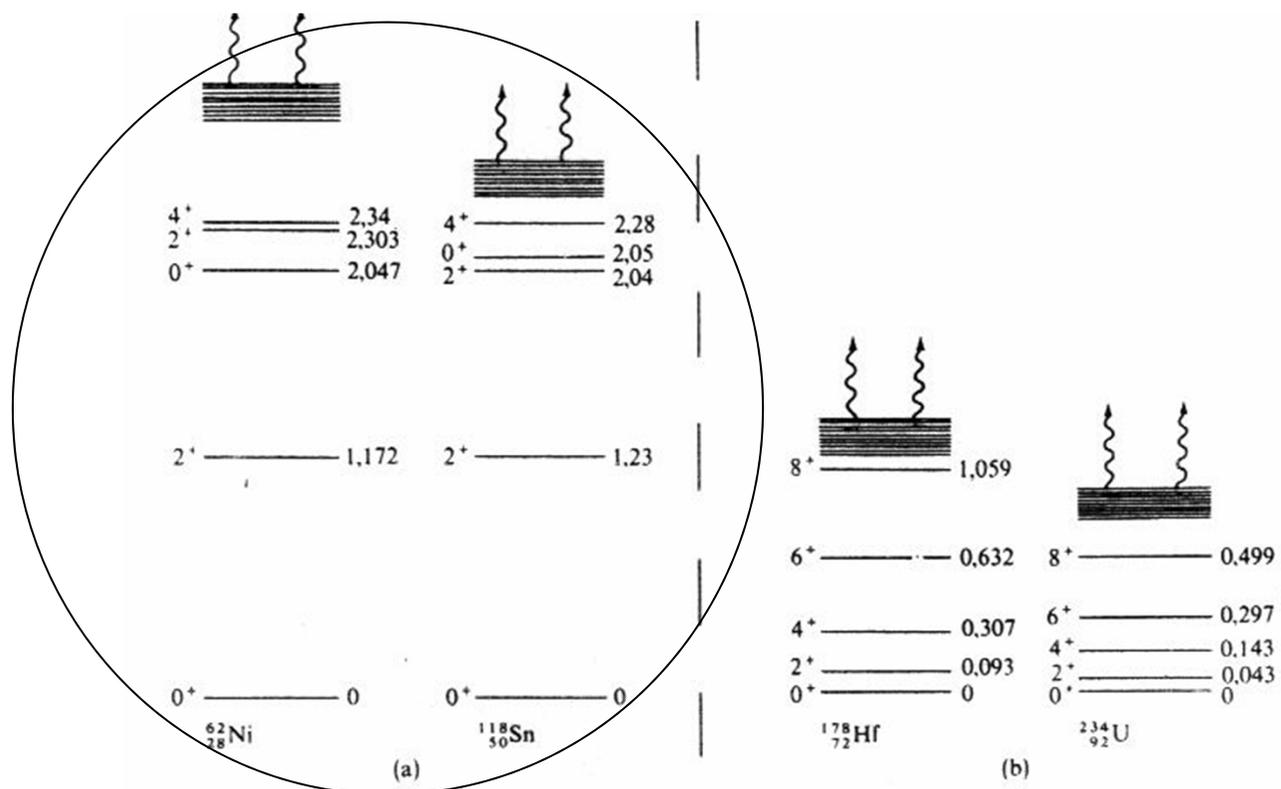
Existe un tercer tipo de excitación colectiva que es la fisión nuclear

# Vibraciones: evidencias experimentales

Vibración → excitaciones colectiva compatible con la simetría esférica

Candidatos a manifestar vibraciones → núcleos par-par cerca del cierre de capas donde

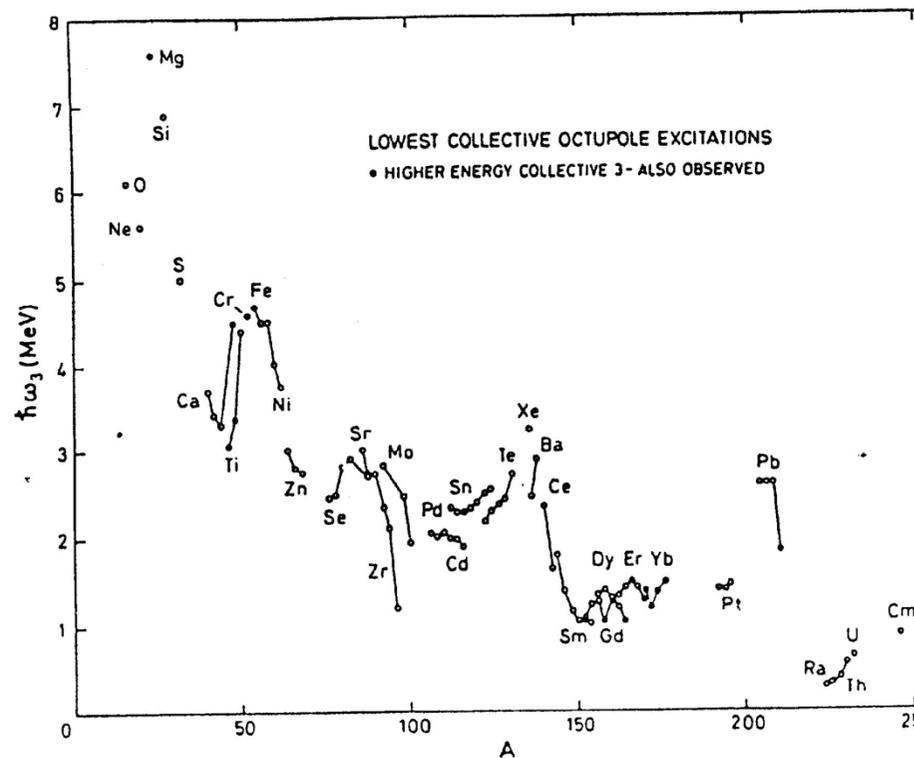
- primer estado excitado  $2^+$
- segundo grupo de estados excitados  $0^+, 2^+, 4^+$  y a una energía doble del primer  $2^+$
- tercer grupo con un nivel  $6^+$  y a triple energía que el primer  $2^+$



# Vibraciones: evidencias experimentales

Otras características observadas en núcleos par-par cerca del cierre de capas

- presencia de un estado  $3^- \rightarrow$  origen colectivo
- transición de tipo E3 con una fuerza asociada muy grande



Máxima en la capa cerrada

→ Movimiento vibratorio de los nucleones muy cerca de la superficie.

# Descripción de una superficie oscilante

## PARAMETRIZACION VIBRACIONES DE SUPERFICIE

Superficie esférica que instantáneamente fluctúa alrededor de la superficie esférica

$$R(t) = R_0 \left[ 1 + \sum_{\lambda, \mu} \alpha_{\lambda\mu}(t) Y_{\lambda}^{\mu}(\vartheta, \varphi) \right]$$

$\alpha_{\lambda, \mu}(t)$  son funciones sinusoidales del tiempo.

Como en el caso de la deformación consideramos simetría especular  $\alpha_{\lambda, \mu} = \alpha_{\lambda, -\mu}$   
 y si tenemos simetría axial:  $\alpha_{2, -2} = \alpha_{2, 2}$      $\alpha_{2, 1} = \alpha_{2, -1} = 0$

$\lambda$  da el orden multipolar del desarrollo

# Descripción de una superficie oscilante

$\lambda=0$  simetría esférica, oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio,  $E > 10 \text{ MeV}$

$$R = R_0 [1 + a_0 \cos \omega t]$$

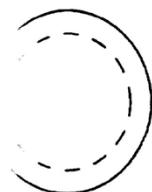
$\lambda=1$  modo dipolar. Para  $\mu=0$

$$R = R_0 [1 + (a_0 \cos \omega t) \cos \omega \theta]$$

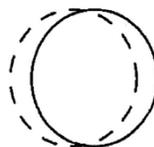
$\lambda=2$  modo cuadrupolar. Baja energía

$$R = R_0 [1 + (a_0 \cos \omega t)(3 \cos^2 \theta - 1)]$$

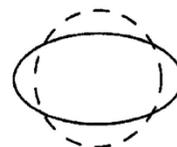
$\lambda=3$  modo octupolar. Baja energía



$\lambda = 0$



$\lambda = 1$



$\lambda = 2$



$\lambda = 3$

## Energía del movimiento vibratorio

Para calcular la energía asociada a un movimiento vibratorio de la superficie nuclear podemos recurrir a la analogía del movimiento vibratorio de una gota líquida. Este problema fue resuelto por Lord Rayleigh en 1877 para un fluido incompresible e irrotacional llegando a las siguientes expresiones para la energía cinética y potencial del sistema:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \mu} B_{\lambda} |\dot{\alpha}_{\lambda, \mu}(t)|^2$$

$$B_{\lambda} = \frac{\rho R_o^2}{\lambda}$$

siendo  $\rho$  y  $R_o$  la densidad y el radio de la gota

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \mu} C_{\lambda} |\alpha_{\lambda, \mu}|^2$$

$$C_{\lambda} = SR_o^2 (\lambda - 1)(\lambda + 2) - \frac{3}{2\pi} \frac{Z^2 e^2}{R_o} \frac{\lambda - 1}{2\lambda + 1}$$

En  $C_{\lambda}$  se ha sustraído la energía Coulombiana de los protones. El factor  $S$  representa la tensión superficial que puede calcularse usando una fórmula de masas.

$$4\pi R_o^2 S = a_s A^{2/3} \text{ MeV}$$

# Bandas vibracionales

Para adaptar este problema al movimiento vibratorio de un núcleo hay que plantear el hamiltoniano correspondiente a partir de las ecuaciones anteriores:

$$H = T + V = \sum_{\lambda, \mu} \left( \frac{1}{2B_\lambda} p_{\lambda\mu}^2 + \frac{1}{2} C_\lambda \alpha_{\lambda\mu}^2 \right) \quad p_{\lambda\mu}^2 = B_\lambda \dot{\alpha}_{\lambda, \mu}^2$$

El hamiltoniano resultante es una suma de osciladores con frecuencia:

$$\omega_\lambda = \sqrt{\frac{C_\lambda}{B_\lambda}}$$

Por analogía a la teoría cuántica del electromagnetismo a cada cuanto de vibración le llamaremos fonón con energía  $E = \hbar\omega$  (bosón) y espín (momento angular total)  $\lambda\hbar$

La energía de un estado construido por fonones cuadrupolares ( $\lambda=2$ ) tendrá un valor

$$E = \hbar\omega \sum_{\mu=-2}^2 (n_\mu + 1/2) = \hbar\omega(N + 5/2)$$

5/2 es la energía del pto cero  $\rightarrow$  parte de la energía del núcleo en su estado fundamental

La secuencia de estados excitados para una vibración cuadrupolar

$$E = \frac{7}{2} \hbar\omega, \frac{9}{2} \hbar\omega, \frac{11}{2} \hbar\omega, \dots$$

# Bandas vibracionales

Para determinar el espín y paridad de cada nivel hay que tener en cuenta que la excitación está mediada por fonones (bosones)  $\rightarrow$  f.d.o del sistema es simétrica y el acoplamiento de dos fonones será:

$$|j_1 j_2 JM\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n [\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM \rangle |j_1\rangle |j_2\rangle + \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM \rangle |j_2\rangle |j_1\rangle]$$

teniendo en cuenta:

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM \rangle = (-1)^{j_1 + j_2 + J} \langle j_2 j_1 m_2 m_1 | JM \rangle$$

resulta

$$|j_1 j_2 JM\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [1 + (-1)^{4+J}] \sum_M [\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM \rangle |j_1\rangle |j_2\rangle]$$

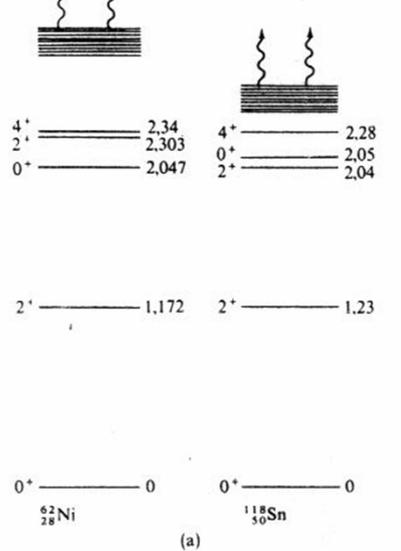
por tanto la función de onda se anula para  $J=1,3$ . La paridad la obtenemos como  $(-1)^l \rightarrow J^p = 0^+, 2^+, 4^+$

Extendiendo el acoplamiento a tres fonones  $J^p = 0^+, 2^+, 3^+, 4^+, 6^+$

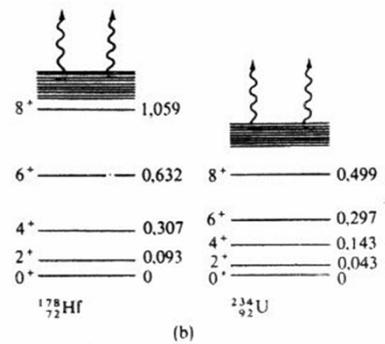
Los niveles de energía del modo cuadrupolar será 
$$\hbar\omega(\text{MeV}) \approx \frac{29.7}{\sqrt{A}} \left(1 - \frac{Z^2}{48A}\right)^{1/2} [N + 5/2]$$

# Bandas vibracionales

Este resultado explica las bandas vibracionales excepto la ruptura de degeneración observada

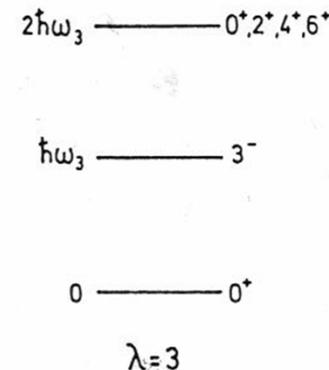
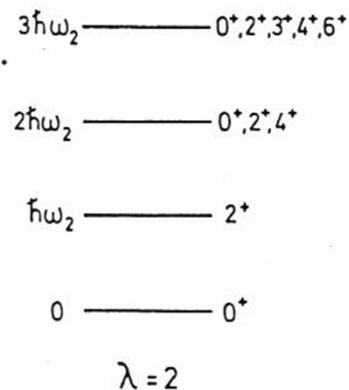


→ Para ello hay que tener de nuevo en cuenta la interacción residual entre los nucleones (apareamiento)



Utilizando el mismo razonamiento podemos describir los estados vibracionales octupolares →  
Se trata de estados con paridad negativa, el espín de un fonón será  $3\hbar$ .

→ explica el nivel colectivo  $3^-$

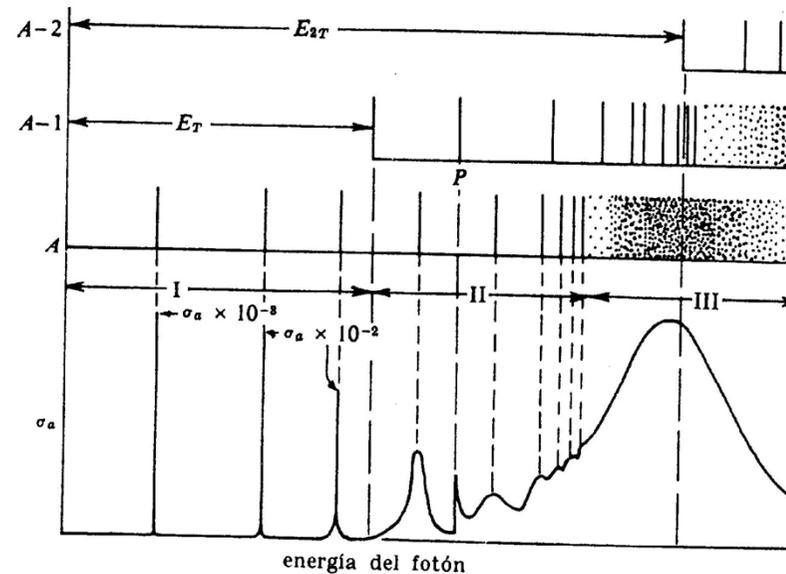
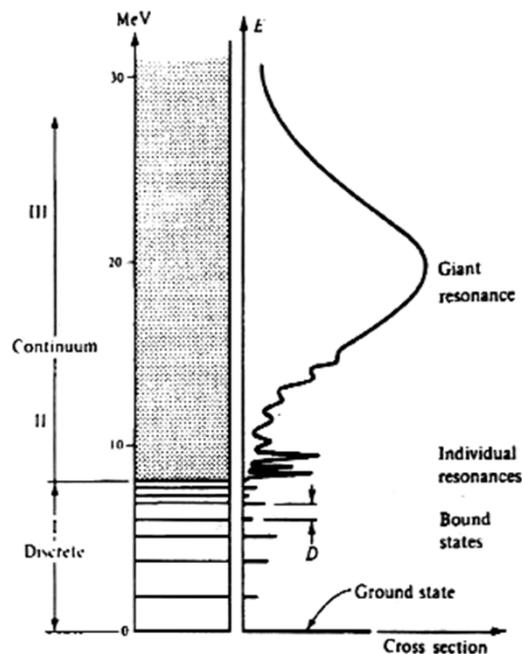


# Resonancias gigantes

Modo de excitación nuclear de gran amplitud en los que participan gran número de nucleones.

Ponen en juego  $E \sim 10$  MeV grandes  $\rightarrow$  comparado con las energías de las excitaciones de partícula independiente  $\rightarrow$  necesitaremos reacciones de fotoabsorción o entre iones pesados para poder excitarlas

Comparación excitaciones individuales-colectivas



Resonancia = superposición de muchos estados individuales

# Resonancias gigantes

## CARACTERIZACIÓN DE RESONANCIAS

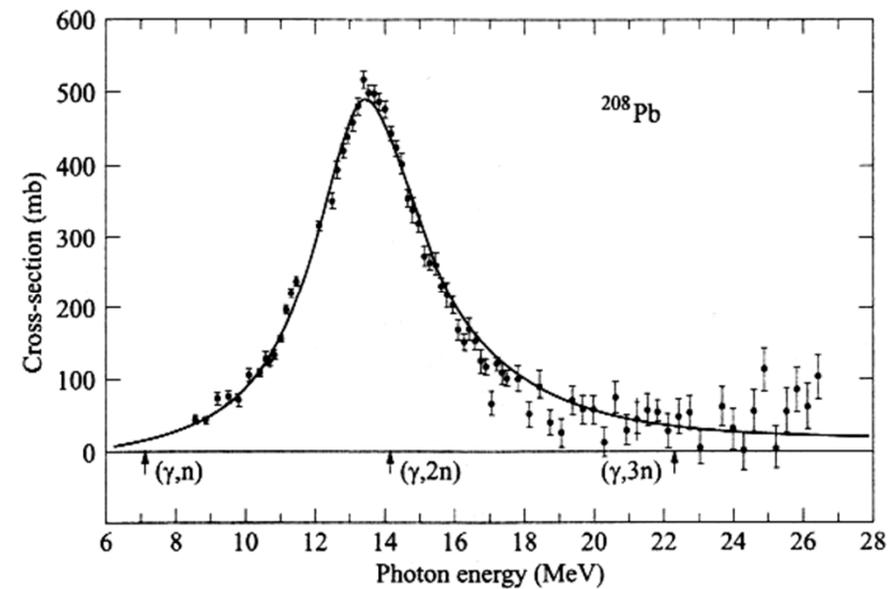
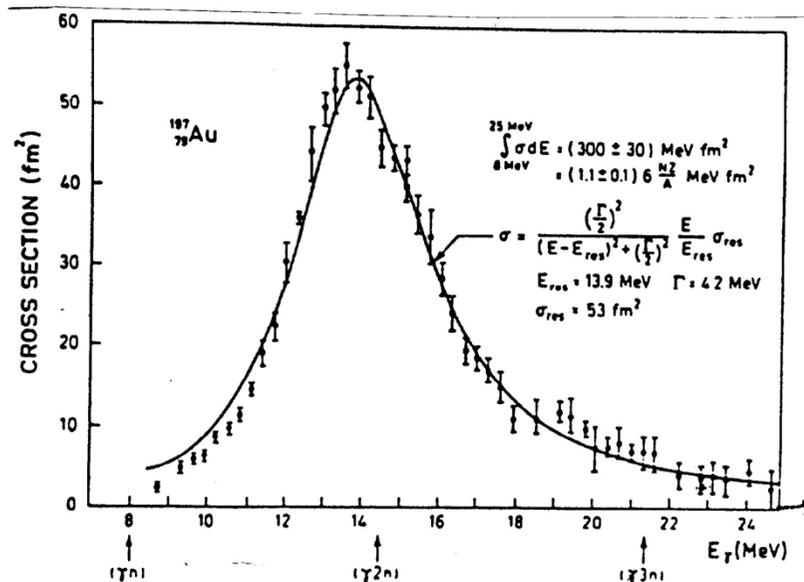
Valor medio y varianza. Fórmula de Breit-Wigner

$$\sigma(E) = \frac{\sigma_0}{(E - E_m)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$$

$\sigma_0 \rightarrow$  valor máximo de la distribución

$E_m \rightarrow$  valor medio

$\Gamma_m \rightarrow$  anchura media



# Resonancias gigantes: clasificación

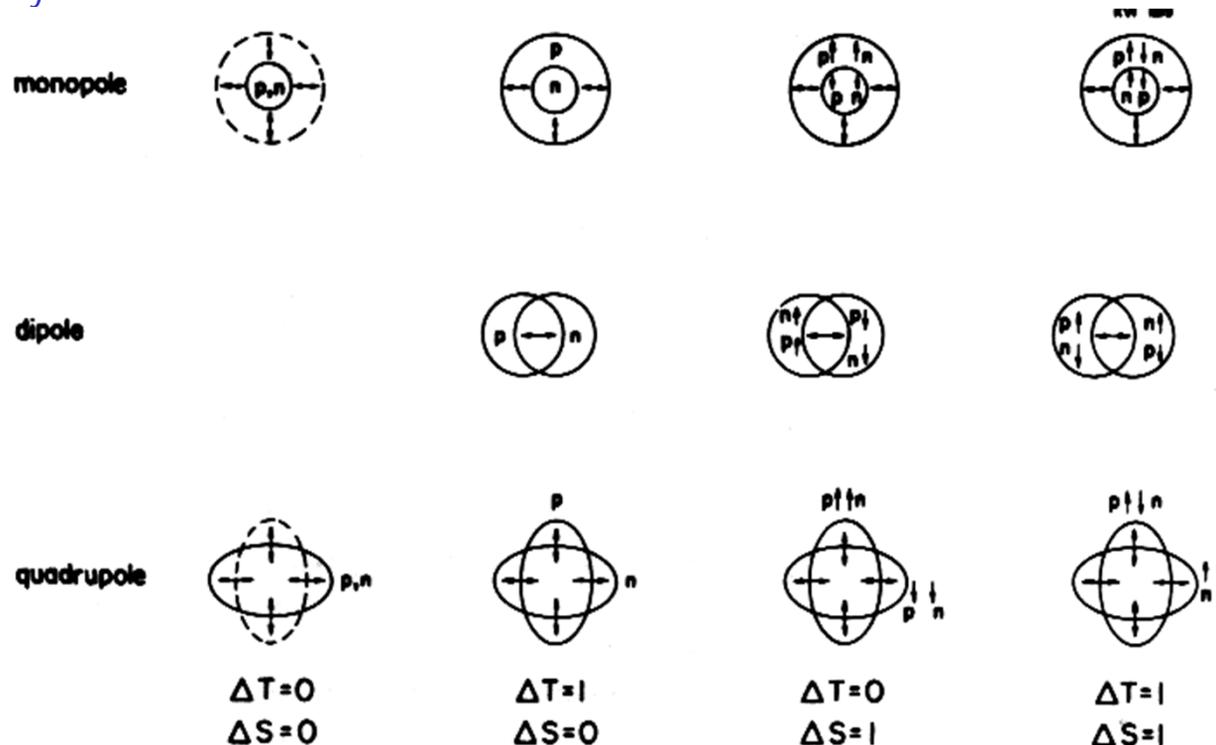
Dependiendo de si el movimiento colectivo de los nucleones depende de su espín (S) y de su isospín (T). Además la forma del movimiento depende de la multipolaridad.

$\Delta S=0 \rightarrow$  no depende de espín  $\rightarrow$  ELECTRICAS

$\Delta S=1 \rightarrow$  depende de espín  $\rightarrow$  MAGNETICAS

$\Delta T=0 \rightarrow$  protones y neutrones vibran en fase  $\rightarrow$  ISOESCALARES

$\Delta T=1 \rightarrow$  protones y neutrones vibran en contrafase  $\rightarrow$  ISOVECTORIALES

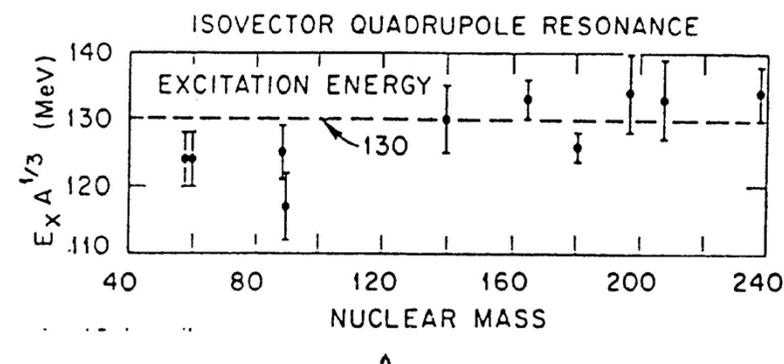
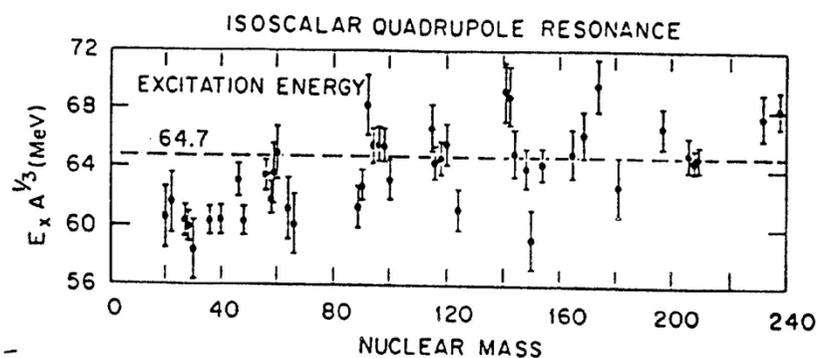


# Resonancias gigantes: clasificación

Desde un punto de vista microscópico → las resonancias se explican como una excitación coherente de excitaciones individuales. Es la interacción residual entre los nucleones la responsable de originar un solo estado colectivo.

ISOESCALARES → interacción residual atractiva (menor energía)

ISOVECTORIALES → interacción residual repulsiva (mayor energía)



$$E_{esc} \approx 65 A^{-1/3}$$

$$E_{vec} \approx 130 A^{-1/3}$$

# La resonancia dipolar gigante (GDR)

Es una resonancia isovectorial con multipolaridad  $l=1$ .

La más fácilmente excitable → la mejor estudiada

Método sondas electromagnéticas → fotoabsorción o excitación coulombiana

Método de desexcitación → emisión de neutrones, fotones o fisión

Modelo macroscópico: el núcleo es un sistema de dos fluidos → protones y neutrones

- Al absorber la radiación EM se produce un desplazamiento de un fluido respecto del otro
- la fuerza nuclear obliga a los nucleones a volver a su posición

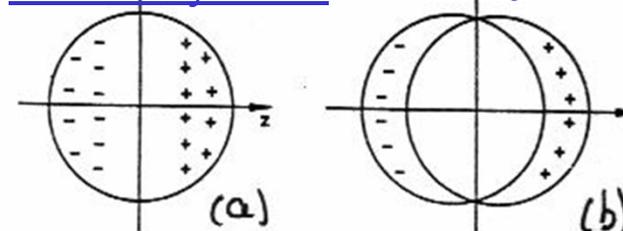
Goldhaber y Teller : fluidos incompresibles y de superficie constante

$$E = h\omega = h\sqrt{\frac{K}{M}} \approx \sqrt{\frac{R^2}{R^3}} = \frac{1}{\sqrt{R}} \approx A^{-1/6}$$

Steinwedel y Jensen: fluidos vibran en oposición de fase dentro del Volumen nuclear

$$E = h\omega = h\sqrt{\frac{K}{M}} \approx \sqrt{\frac{R}{R^3}} = \frac{1}{\sqrt{R^2}} \approx A^{-1/3}$$

Steinwedel y Jensen      Goldhaber y Teller



# La resonancia dipolar gigante (GDR)

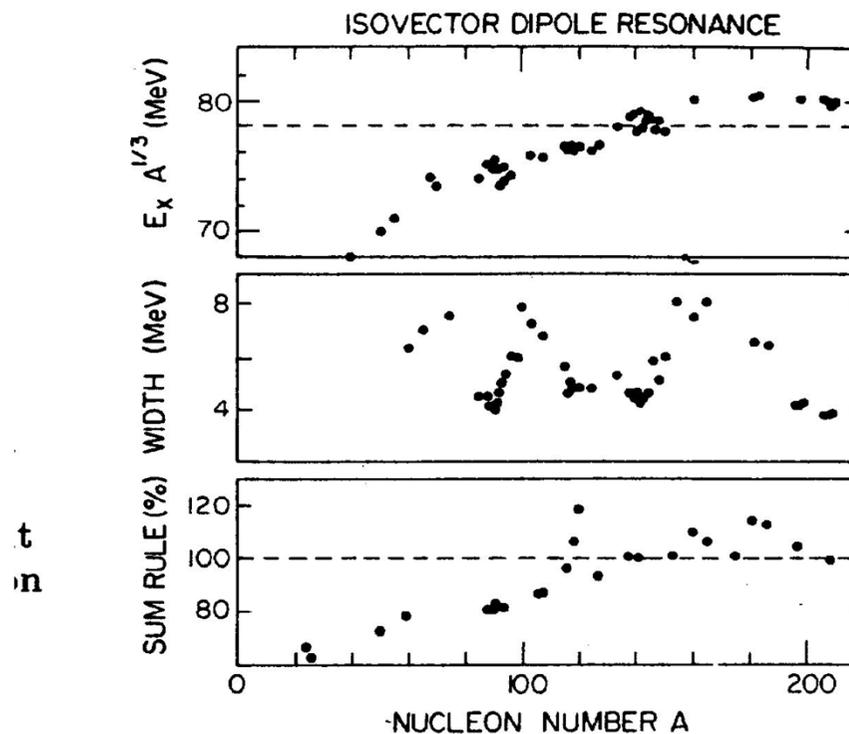
Experimentalmente la energía de excitación media de la GDR para núcleos esféricos

$$E_{GDR} = 31,2A^{-1/3} + 20,6A^{-1/6} \text{ MeV}$$

El comportamiento promedio de la anchura varía poco con A:

$^{208}\text{Pb} \Gamma = 4 \text{ MeV}$

$^{64}\text{Cu} \Gamma = 7 \text{ MeV}$

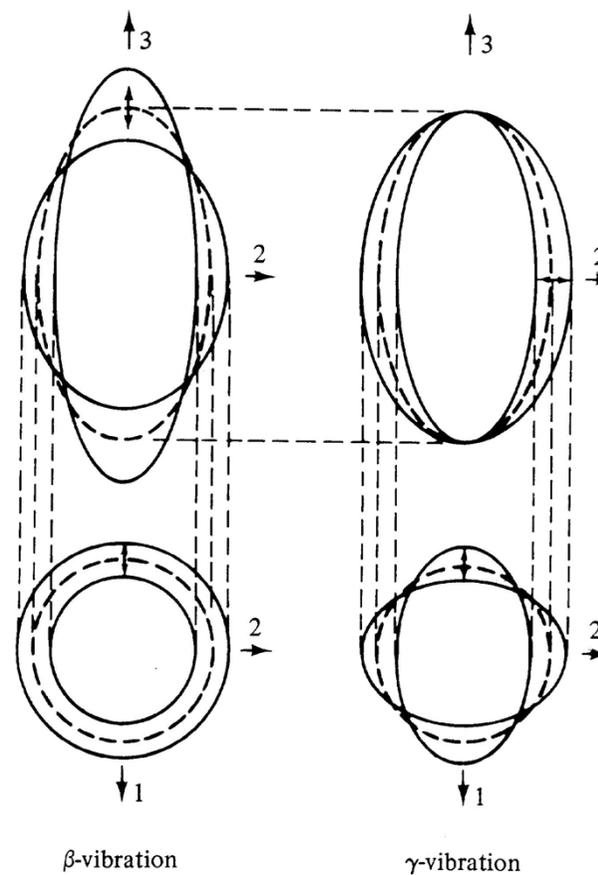


# La resonancia dipolar gigante (GDR)

La GDR para núcleos deformados

Tendremos dos componentes asociadas a oscilaciones

paralelas al eje de simetría  $\beta$  o  $\gamma$



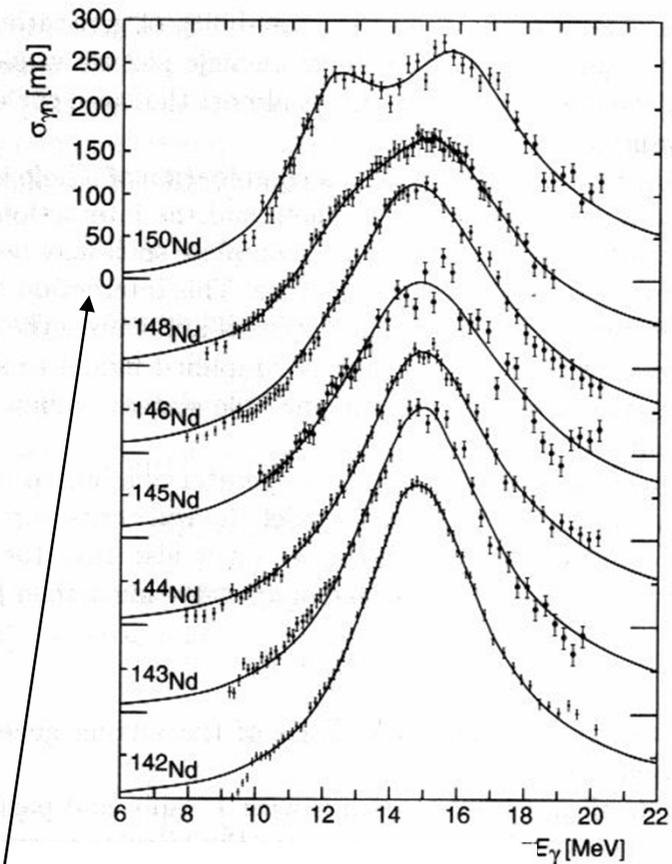
# La resonancia dipolar gigante (GDR)

La sección eficaz de la resonancia en función de la energía de excitación puede representarse a partir de dos funciones de Lorentz

Energías medias de ambas componentes para núcleos prolata

( $E_1$  y  $E_2$  se invierten en el caso de núcleos oblate)

$$\beta = \frac{\sqrt{\frac{4\pi}{5}} \left( \frac{E_2}{E_1} - 1 \right)}{\left( \frac{E_2}{2E_1} + 0,8665 \right)}$$



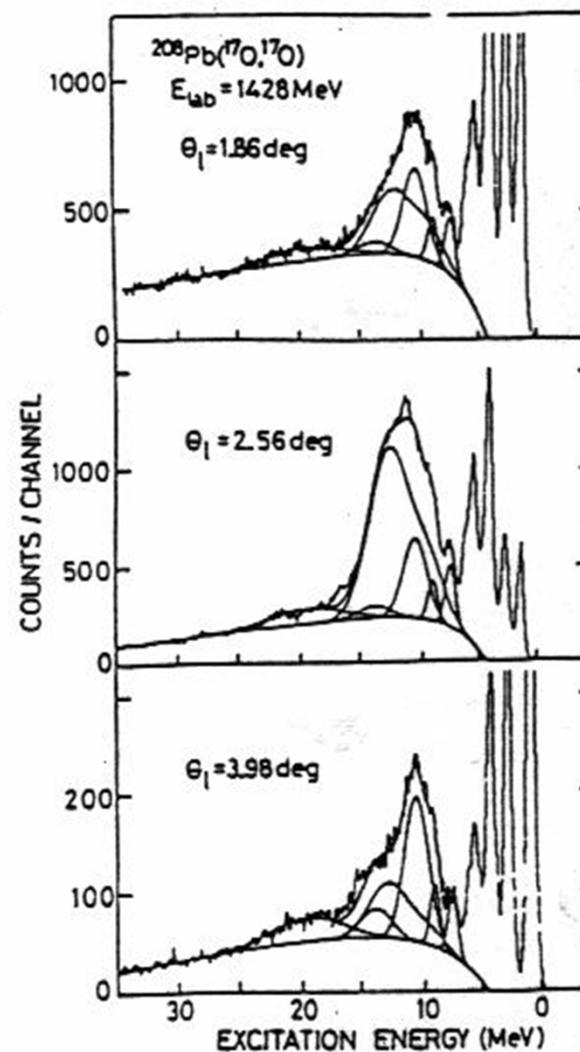
# La resonancia dipolar gigante (GDR)

Las reacciones entre iones pesados permiten excitar la GDR a través del canal de excitación Coulombiana pero también excitan resonancias isoscalares (GQR o GMR) en colisiones con menor parámetro de impacto mediadas por la fuerza nuclear.

Con esta técnica se puede estudiar de forma simultánea modos de excitación isoscalares e isovectoriales

En reacciones inducidas por  $^{17}\text{O}$  a 84 A MeV sobre  $^{208}\text{Pb}$  se observa un aumento de la sección eficaz en torno a 10 MeV de energía de excitación que se asocia a la excitación de diferentes resonancias.

Midiendo estas resonancias para diferentes ángulos de difusión se pueden resolver cada una de las resonancias.



# La resonancia dipolar gigante (GDR)

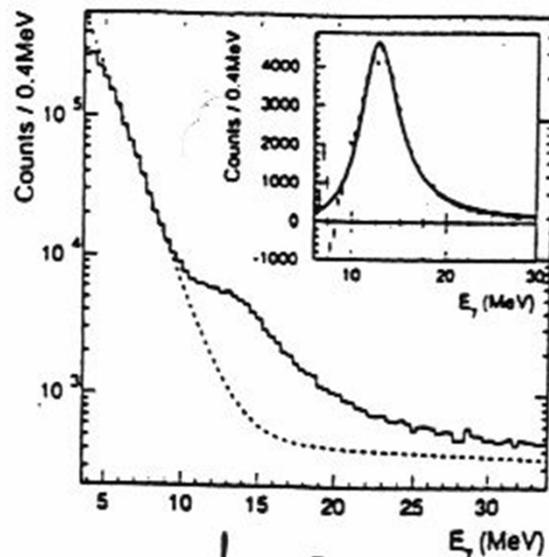
## Excitaciones de multifonones

Las resonancias gigantes también pueden excitarse en modos de oscilación que corresponden al acoplamiento de más de un fonón. La excitación de estos modos resonantes requiere mucha más energía. En el caso de la GDR la excitación de dos fonones corresponde a ~25 MeV. Para alcanzar estas energías se utilizan reacciones periféricas entre iones pesados relativistas.

$^{209}\text{Bi} + ^{208}\text{Pb} @ 1 \text{ A. GeV} \rightarrow$  existencia de estados de multifonones en el  $^{208}\text{Pb}$  (blanco)

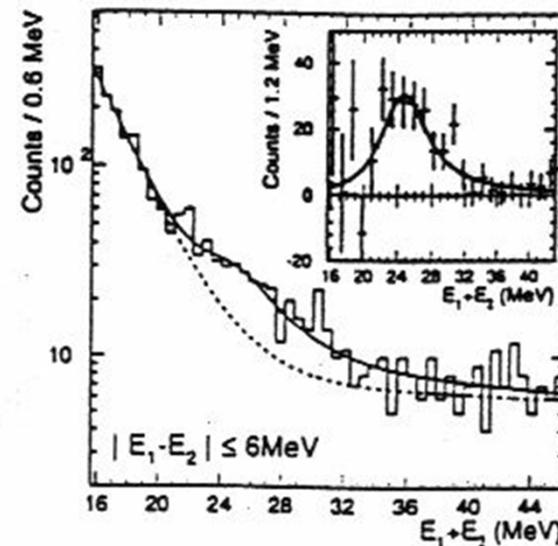
$\rightarrow$  selección de reacciones periféricas ( $E^* < 50 \text{ MeV}$ ) considerando colisiones en las que no hay emisión de nucleones

$\rightarrow$  selección de fotones emitidos hacia atrás y que por tanto provienen de la desexcitación del  $^{208}\text{Pb}$



Detección de 1 fotón

$E_{\text{GDR}} \sim 13 \text{ MeV}$   
 $G_{\text{GDR}} \sim 4 \text{ MeV}$



Detección de 2  
fotones con  
 $E_1 - E_2 < 6 \text{ MeV}$

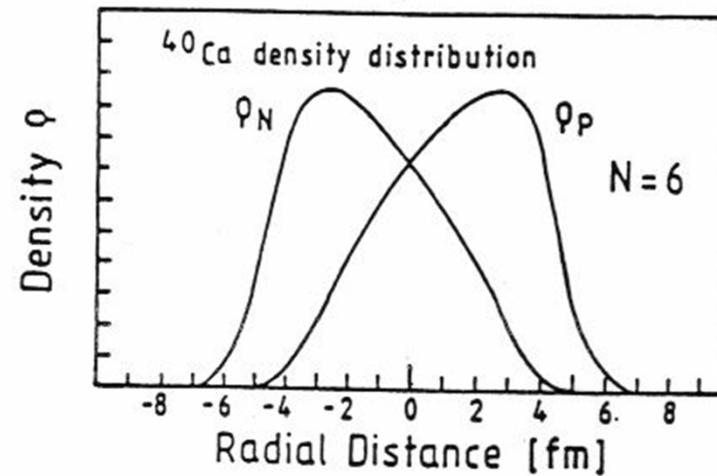
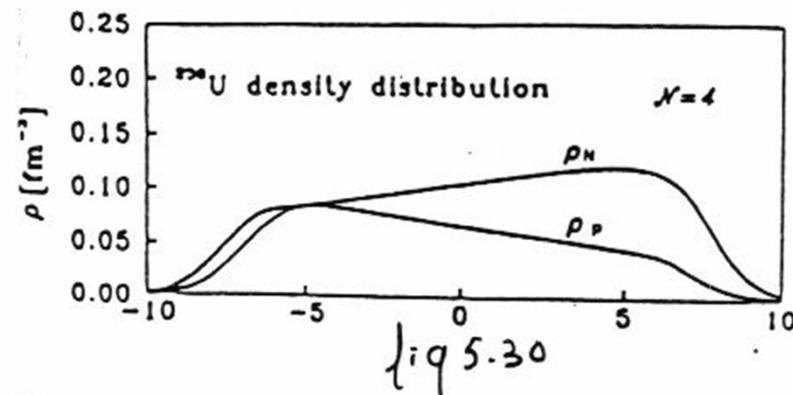
$E_{\text{GDR}}^2 \sim 26,6 \text{ MeV}$   
 $G_{\text{GDR}}^2 \sim 5.8 \text{ MeV}$

# La resonancia dipolar gigante (GDR)

Excitaciones de multifonones  $\rightarrow$  producen estados exóticos de la materia nuclear

Estado de multifonones  $n=4$  en el  $^{208}\text{Pb}$

Estado de multifonones  $n=6$  en el  $^{40}\text{Ca}$



# La resonancia monopolar gigante GMR

Es el único modo que se caracteriza por una oscilación del radio nuclear

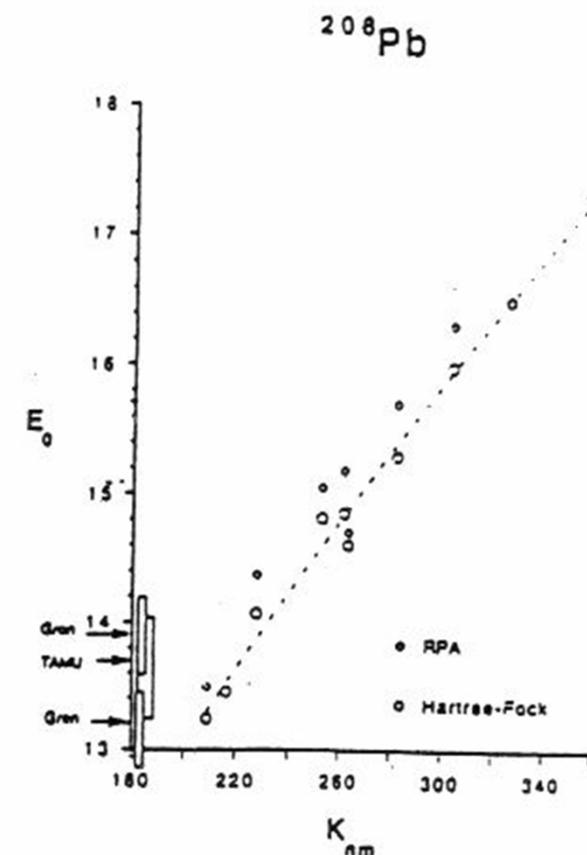
→ la frecuencia de vibración está relacionada con el coeficiente de compresibilidad de la materia nuclear

→ EOS , implicaciones astrofísicas

Utilizando un modelo hidrodinámico se puede relacionar la Frecuencia de vibración de la GMR con el coeficiente de compresibilidad de la materia nuclear:

$$E_o = \hbar\omega_o = \hbar\sqrt{\frac{\pi^2 K_A}{9mR^2}}$$

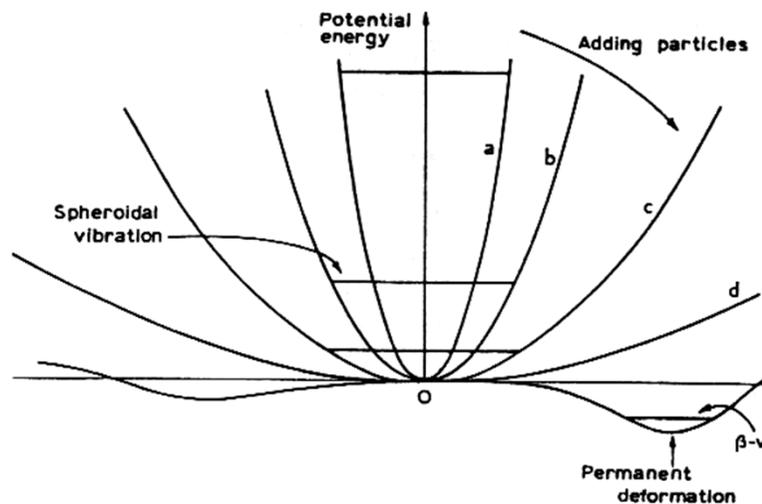
Para el  $^{208}\text{Pb}$   $E_o=13,9$  MeV y  $R=1.2A^{1/3}$  fm se obtiene  $K_A=221$  MeV.



# Rotaciones

Otro mecanismo de absorción de energía por parte de los núcleos implicando excitaciones colectivas de nucleones es la rotación.

- Cuánticamente la rotación sólo implica variaciones de energía en cuerpos deformados que roten perpendicularmente su eje de simetría.
- La medida sistemática de los momentos cuadrupolares del primer estado excitado de los núcleos par-par evidencia que los núcleos con números másicos  $150 < A < 180$  y  $220 < A < 250$  están deformados en su estado fundamental.



La deformación puede ser propia del estado fundamental.

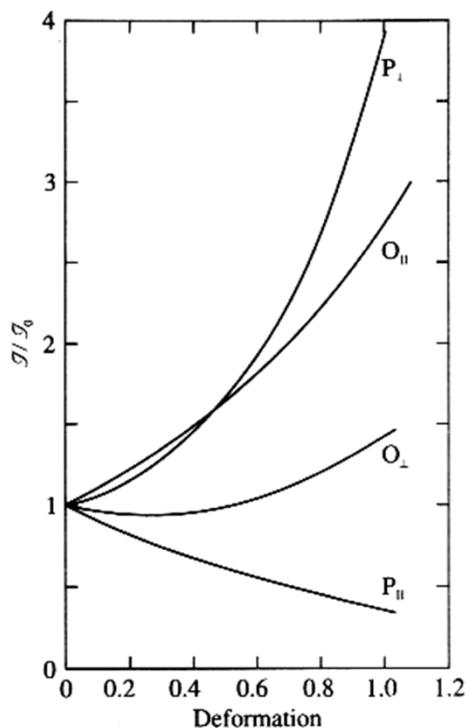
- los núcleos situados entre capas tienen una configuración de mínima energía cuando están deformados.

# Rotaciones

La deformación puede inducirse o acentuarse en un movimiento rotatorio debido al equilibrio entre la fuerza nuclear, la electromagnética y la centrífuga.

- El estado de mínima energía de un sistema en rotación es aquel para el que el momento de inercia es máximo.

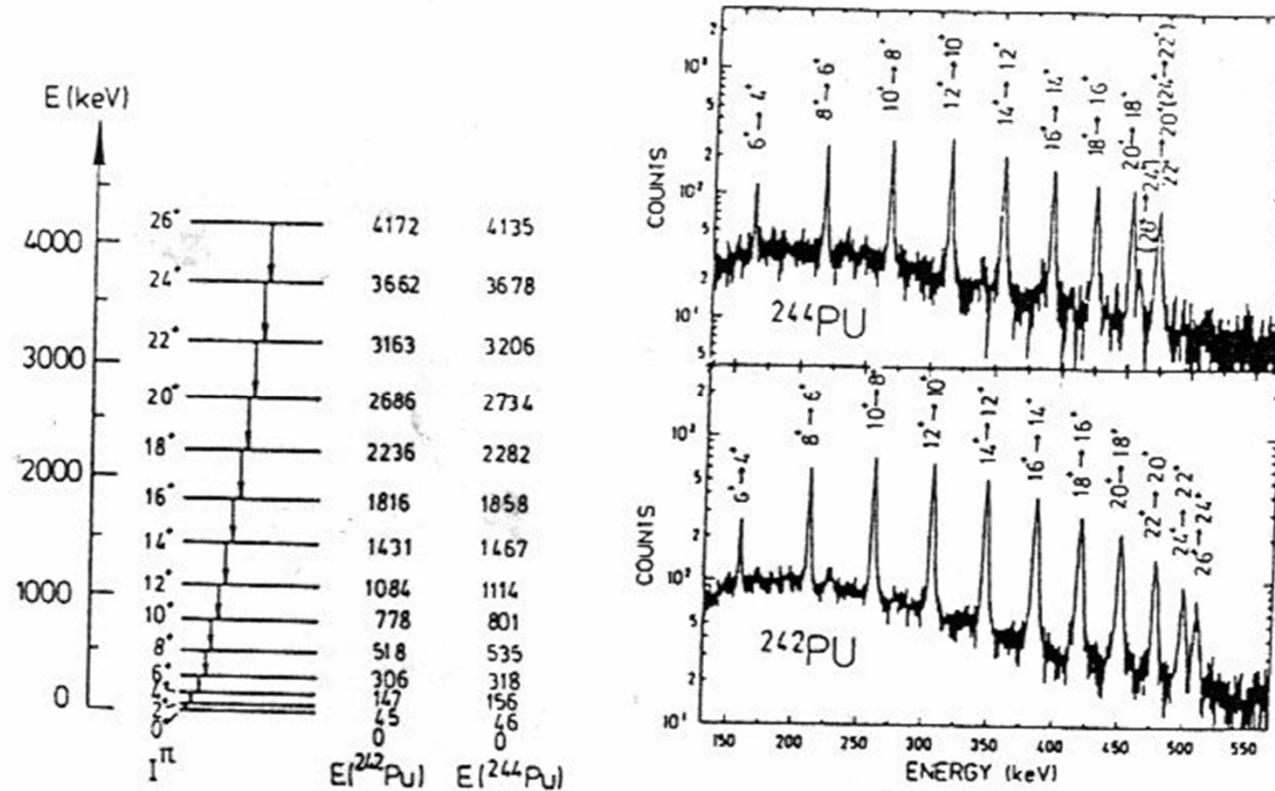
$$E_{rot} = \frac{J^2}{2\mathfrak{I}}$$



La deformación aumenta con la velocidades angular:

- Para velocidades angulares pequeñas la configuración más favorable es una deformación oblate que gira alrededor de su eje simetría
- Para velocidades angulares grandes (mayor deformación) la configuración más favorable es la prolate girando alrededor de un eje perpendicular a su eje de simetría

# Evidencias experimentales



Para el estudio experimental de las rotaciones se utilizan reacciones entre iones pesados ya que transfieren gran cantidad de momento angular.

Los estados excitados correspondientes a rotaciones se caracterizan midiendo la cascada de gammas emitidos durante la desexcitación.

# Rotaciones: descripción clásica

Si consideramos el núcleo como un sólido rígido caracterizado por sus tres ejes de simetría, el movimiento de este sólido puede caracterizarse a partir de las tres componentes de su momento angular:

$$J^2 = J_{x'}^2 + J_{y'}^2 + J_{z'}^2$$

El momento angular puede expresarse como el producto de la velocidad angular y el momento de inercia:

$$J_{x'} = \omega_{x'} I_{x'} \quad J_{y'} = \omega_{y'} I_{y'} \quad J_{z'} = \omega_{z'} I_{z'}$$

Siendo la energía del sistema:

$$E = \sum_{i'=1}^3 \frac{I_{i'} \omega_{i'}^2}{2} = \sum_{i'=1}^3 \frac{J_{i'}^2}{2I_{i'}}$$

En el caso particular de un sólido con simetría axial (prolate, oblate), los momentos de inercia de un elipsoide de semieje  $a$  y  $b$  puede calcularse como:

$$I_{z'} = I_{\parallel} = \frac{2}{5} M a^2 = \frac{2}{5} M R_o^2 \frac{a^2}{R_o^2} = I_o \frac{a^2}{R_o^2}$$

$$I_{x'} = I_{y'} = J_{\perp} = \frac{2}{5} M \frac{a^2 + b^2}{2} = I_o \frac{a^2 + b^2}{2R_o^2}$$

Donde  $I_o$  es el momento inercia de una esfera con radio  $R_o$  y volumen equivalente al del elipsoide.

# Rotaciones: descripción clásica

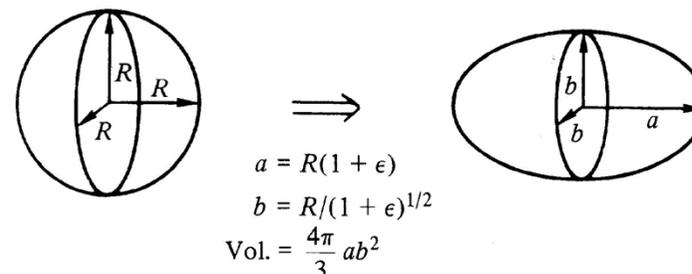
Teniendo en cuenta que las longitudes de los semiejes del elipsoide están relacionadas con los parámetros de deformación a partir de las expresiones:

$$\left. \begin{aligned} a &= R_o(1 + \varepsilon) \\ b &= \frac{R_o}{(1 + \varepsilon)^{1/2}} \end{aligned} \right\} \frac{\Delta R}{R_o} \approx \frac{3}{2}\varepsilon$$

$$\beta = \sqrt{\frac{4\pi}{5}}\varepsilon$$

$$\frac{\Delta R}{R_o} = \frac{3}{4}\sqrt{5\pi}\beta$$

→ Vemos que es posible conectar la energía de rotación con el momento de inercia para diferentes deformaciones



# Rotaciones: descripción cuántica

En este caso utilizaremos el operador que define la rotación  $\Gamma$

Los números cuánticos asociados a este operador son:

J momento angular

K proyección sobre el sistema de ejes principales

m proyección sobre el sistema de referencia del laboratorio

Los operadores asociados a estos n° cuánticos conmutan con el hamiltoniano del sistema

$$[H, \Upsilon^2] = [H, \Upsilon_z] = [H, \Upsilon_{z'}] = 0$$

Donde el H tiene la forma

$$H = \hbar^2 \sum_{i'=1}^3 \frac{\Upsilon_{i'}^2}{2I_{i'}}$$

La f.d.o que describe el sistema es de la forma  $|j, m, k\rangle$  y verifica

$$H|j, m, k\rangle = E|j, m, k\rangle$$

$$\Upsilon^2|j, m, k\rangle = j(j+1)|j, m, k\rangle$$

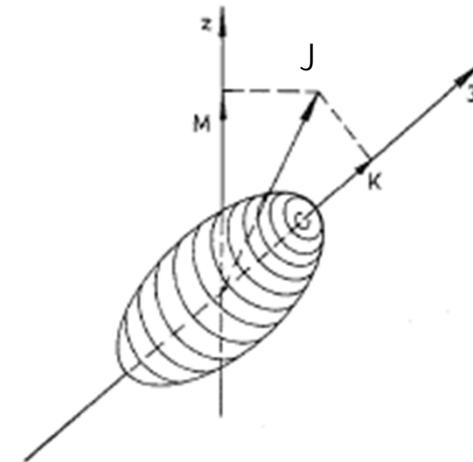
$$\Upsilon_z|j, m, k\rangle = m|j, m, k\rangle$$

$$\Upsilon_{z'}|j, m, k\rangle = k|j, m, k\rangle$$

considerando un sólido con simetría axial

$$I_{x'} = I_{y'} = I_{\perp}$$

$$I_{z'} = I_{\parallel}$$



# Bandas rotacionales

considerando un sólido con simetría axial

$$I_{x'} = I_{y'} = I_{\perp}$$

$$I_{z'} = I_{\parallel}$$

$$H = \hbar^2 \left[ \frac{\Upsilon^2 - \Upsilon_{z'}^2}{2I_{\perp}} + \frac{\Upsilon_{z'}^2}{2I_{\parallel}} \right]$$

y teniendo en cuenta:

$$\Upsilon^2 = \Upsilon_{x'}^2 + \Upsilon_{y'}^2 + \Upsilon_{z'}^2 \Rightarrow \Upsilon_{x'}^2 + \Upsilon_{y'}^2 = \Upsilon^2 - \Upsilon_{z'}^2$$

Por tanto los valores propios de energía de los estados rotacionales podrán calcularse como:

$$E = \frac{\hbar^2}{2I_{\perp}} [j(j+1) - k^2] + \frac{\hbar^2}{2I_{\parallel}} k^2$$

El caso de un núcleo rotando en un eje perpendicular al eje de simetría  $k=0$

$$E = \frac{\hbar^2}{2I_{\perp}} j(j+1)$$

# Bandas rotacionales: núcleos par-par

En mi sistema nuclear tengo que considerar tanto el momento angular intrínseco del núcleo como el de rotación

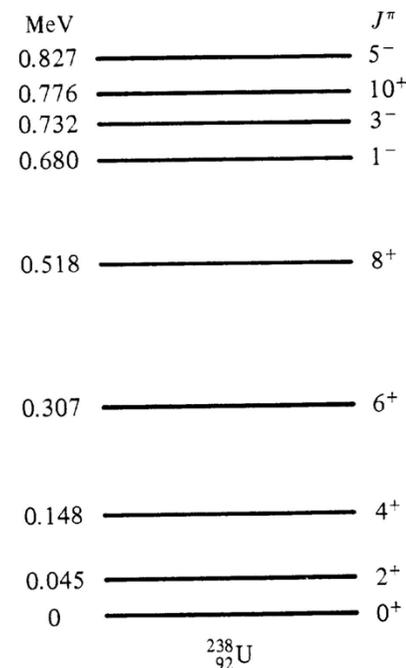
$$I = J + \Upsilon \quad \left| \quad \rightarrow \text{Para núcleos par-par } J=0, \text{ luego } I = \Upsilon.$$

Por tanto la de energía de los niveles corresponde directamente a la banda rotacional

$$E = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}_\perp} i(i+1)$$

Recordamos que en el caso de núcleos par-par y atendiendo a antisimetrización impuesta por Pauli  $J=0^+, 2^+, 4^+ \dots$

Energías muy inferiores a las de excitaciones intrínsecas



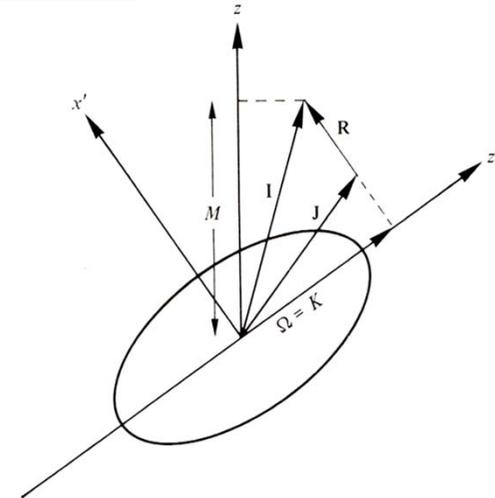
# Bandas rotacionales: núcleos impares

## núcleos impares

$$I = J + \Upsilon \quad \left[ \begin{array}{l} \text{momento angular rotación} + \\ \text{momento angular intrínseco} \end{array} \right.$$

Distingo ahora proyecciones del momento angular total  $I \rightarrow K$   
y del momento angular del nucleón de valencia  $J \rightarrow \Omega$

Para núcleos con simetría axial el momento angular de rotación es perpendicular al eje de simetría y  $K=\Omega$



El hamiltoniano total del sistema puede escribirse como

$$H = \hbar^2 \left[ \frac{\Upsilon^2 - \Upsilon_{z'}^2}{2\mathcal{J}_\perp} + \frac{\Upsilon_{z'}^2}{2\mathcal{J}_\parallel} \right] + H_N \quad \left[ \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \text{donde } H_N \text{ es el hamiltoniano del modelo de Nilsson} \end{array} \right.$$

Las energía de los niveles que constituyen la banda de rotación (recordar que si el eje de rotación es perpendicular al eje de simetría  $k=0$ )

$$E = \hbar^2 \frac{\Upsilon^2}{2\mathcal{J}}$$

# Bandas rotacionales: núcleos impares

Donde

$$\Upsilon^2 = (I - J)^2 = I^2 + J^2 - 2IJ$$

Expresión que se puede transformar si utilizamos los operadores escalera

$$\begin{aligned} I'_\pm &= I_{x'} \pm iI_{y'} && \rightarrow \text{Permite escribir} \\ J'_\pm &= J_{x'} \pm iJ_{y'} && I'_+ J'_- + I'_- J'_+ = 2(I_{x'} J_{x'} + I_{y'} J_{y'}) \\ J_{z'} &= I_{z'} = K \end{aligned}$$

$$IJ = I_{x'} J_{x'} + I_{y'} J_{y'} + I_{z'} J_{z'} = I_{z'} J_{z'} + (I'_+ J'_- + I'_- J'_+) = K^2 + (I'_+ J'_- + I'_- J'_+)$$

Representa el efecto de la inercia que ejerce el core del núcleo en rotación sobre el nucleón de valencia (debido a la fuerza de coriolis).

→ Puede interpretarse como el H acoplamiento que mencionábamos en el modelo adiabático

$$H_{aco} = -\frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}} (I'_+ J'_- + I'_- J'_+)$$

# Bandas rotacionales: núcleos impares

despreciando este término de acoplamiento la energía de los estados de un núcleo impar

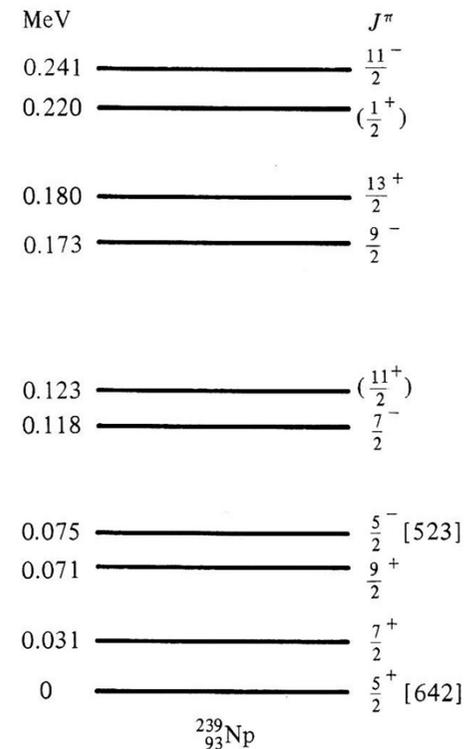
$$E = -\frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}}[i(i+1) + j(j+1) - 2K^2] + \varepsilon_N$$

Como J y K son constantes durante la rotación, sus nº cuánticos y  $\varepsilon_N$  sólo describen el nivel sobre el que se construye la banda de rotación.

→ la secuencia de niveles depende únicamente de  $i(i+1)$

El  $^{239}\text{Np}$  tiene una banda rotacional sobre su estado fundamental deformado  $5/2^+$  que corresponde a un nivel de Nilsson

Energía de un nivel de Nilsson



# Bandas rotacionales

El hamiltoniano que describe un núcleo excitado en rotación es de la forma:

$$H = H_{int} + H_{rot} + H_{aco}$$

- ┌  $H_{int}$  → representa las excitaciones intrínsecas
- |  $H_{rot}$  → representa el movimiento de rotación
- |  $H_{aco}$  → acoplamiento de ambos

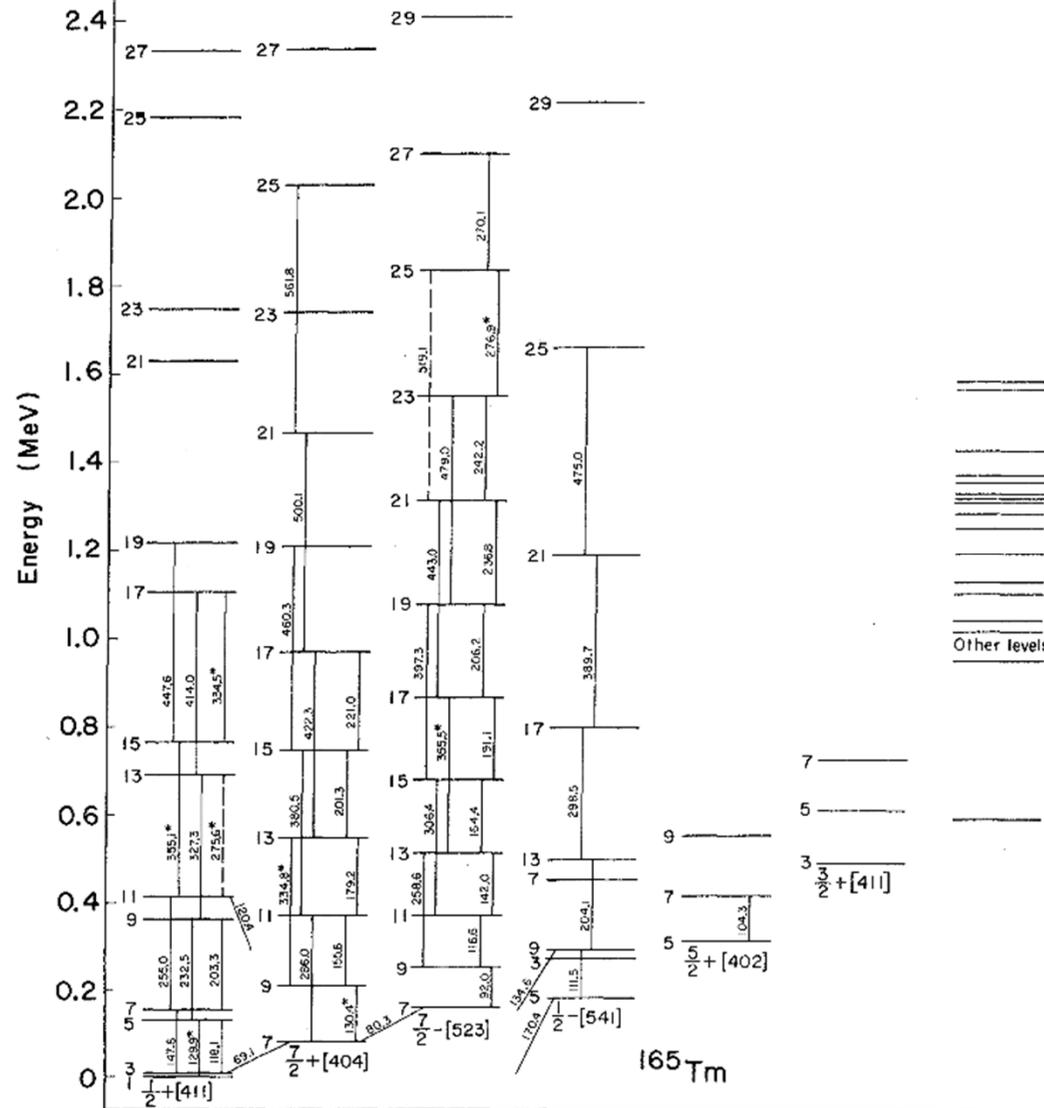
Si consideramos que la frecuencia del movimiento de rotación es muy inferior a la de las excitaciones intrínsecas (aproximación adiabática) → la rotación no afectará a la f.d.o de las excitaciones individuales

$$H = H_{int} + H_{rot} \rightarrow \text{Las bandas rotacionales pueden construirse sobre un nivel excitado de partícula independiente}$$

Análogamente podremos expresar la función de onda y los valores propios de energía de la forma:

$$\Psi = \varphi_{int} \phi_{rot} \quad E = E_{int} + E_{rot} \quad \text{--- Según cálculo anterior}$$

# Bandas rotacionales



El  $^{165}\text{Tm}$  presenta 6 bandas rotacionales construidas sobre respectivos estados excitados del núcleo deformado (modelo de Nilsson).

# Momento de inercia nuclear

La determinación de la energía y el J para cada de núcleos de una banda rotacional permite obtener información sobre el momento de inercia

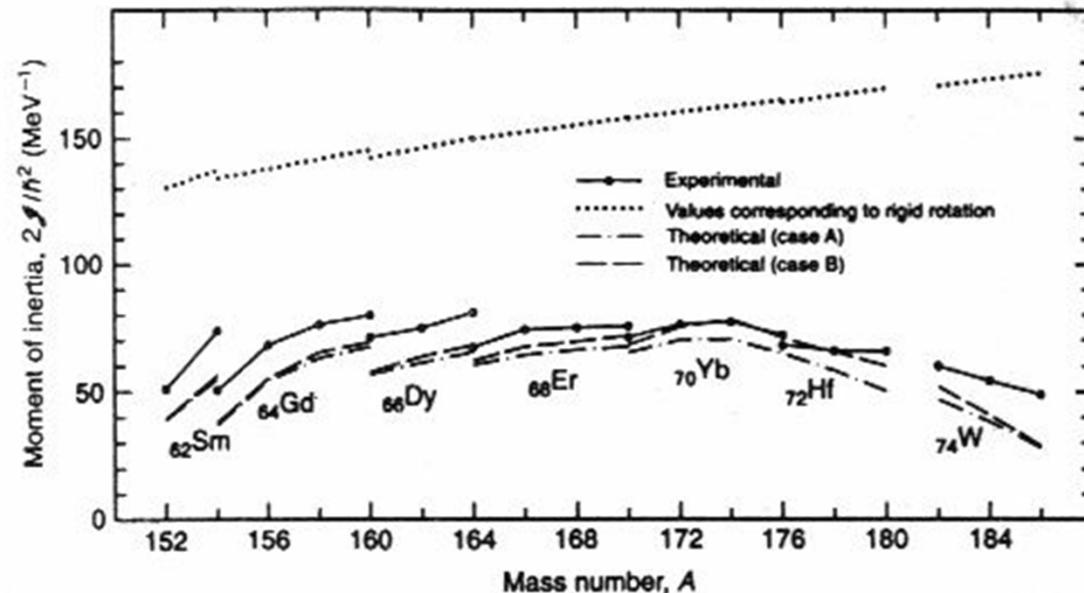
$$E = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}} J(J+1) \approx \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}} J^2$$

→ Si representamos  $E = f(J(J+1))$  la inversa de la pendiente es el momento de inercia

Suposición → comportamiento sólido rígido

discrepancia entre los momentos de inercia experimentales y calculados

→ No todos los nucleones participan en el movimiento de rotación



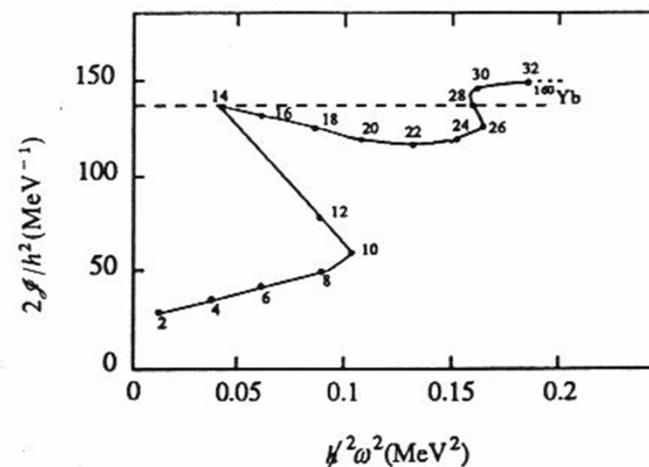
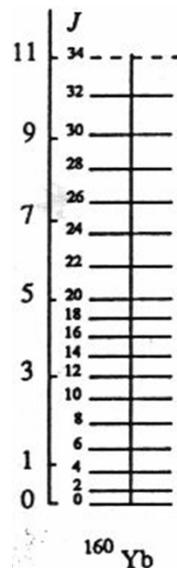
# Momento de inercia

Esta discrepancia puede entenderse si tenemos en cuenta la energía de apareamiento de los nucleones

En los núcleos par-par todos los nucleones están apareados

→ superfluidez: los nucleones no oponen resistencia a la rotación y disminuye el momento de inercia

La fuerza centrífuga puede romper pares aumentando así la resistencia al movimiento y por tanto aproximando el momento de inercia del núcleo al de un sólido rígido

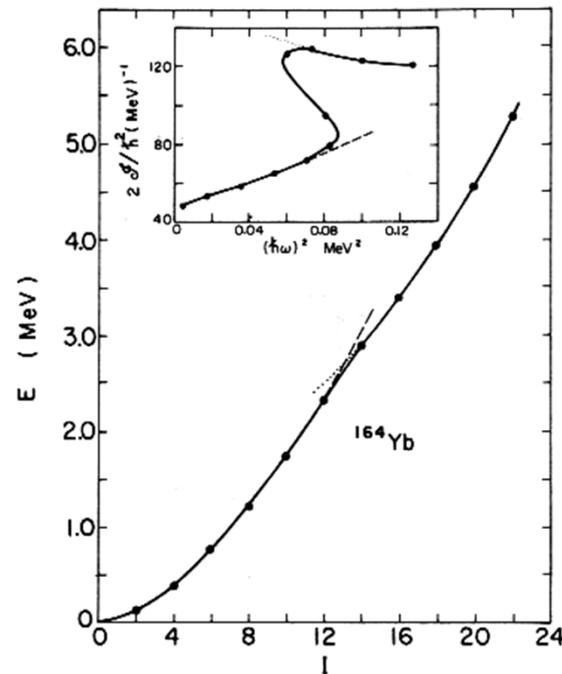


Momento de inercia vs. E rotación  
unidades de  $\hbar$  barra

- - - predicción sólido rígido

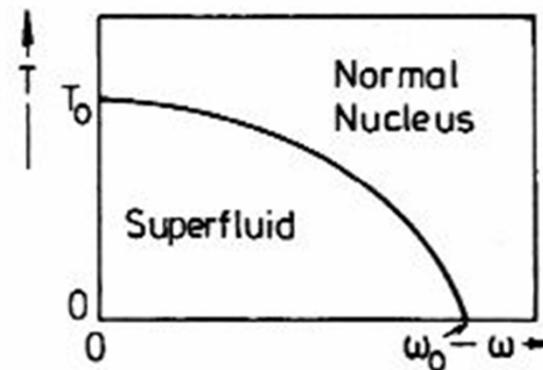
El exceso de energía se  
invierte en romper pares →  
aumenta el momento de inercia  
hasta el sólido rígido **BACKBENDING**

# Momento de inercia

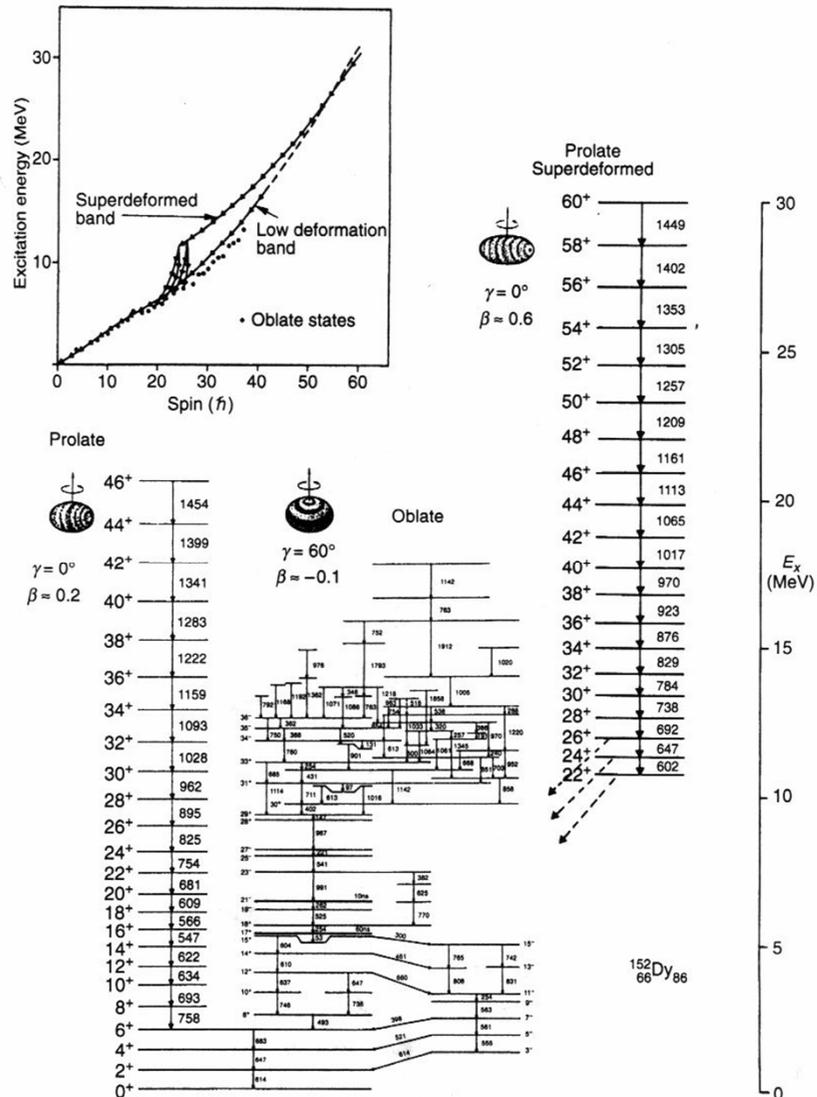


Puede estimarse el valor de momento angular orbital a partir del cual al núcleo le es menos costoso el romper un par y continuar la rotación con los nucleones no apareados

→ el cambio del momento de inercia se identifica con una transición de fase



# Superdeformación

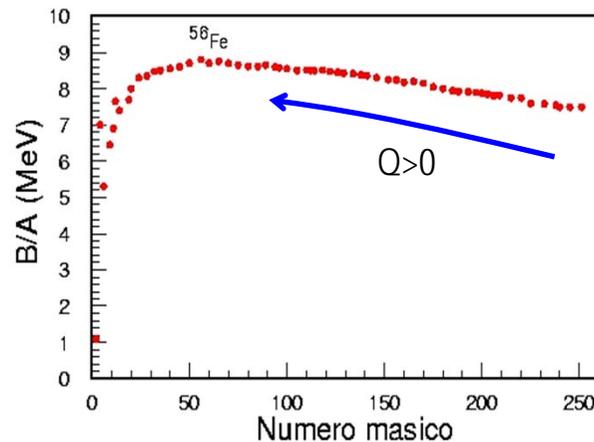
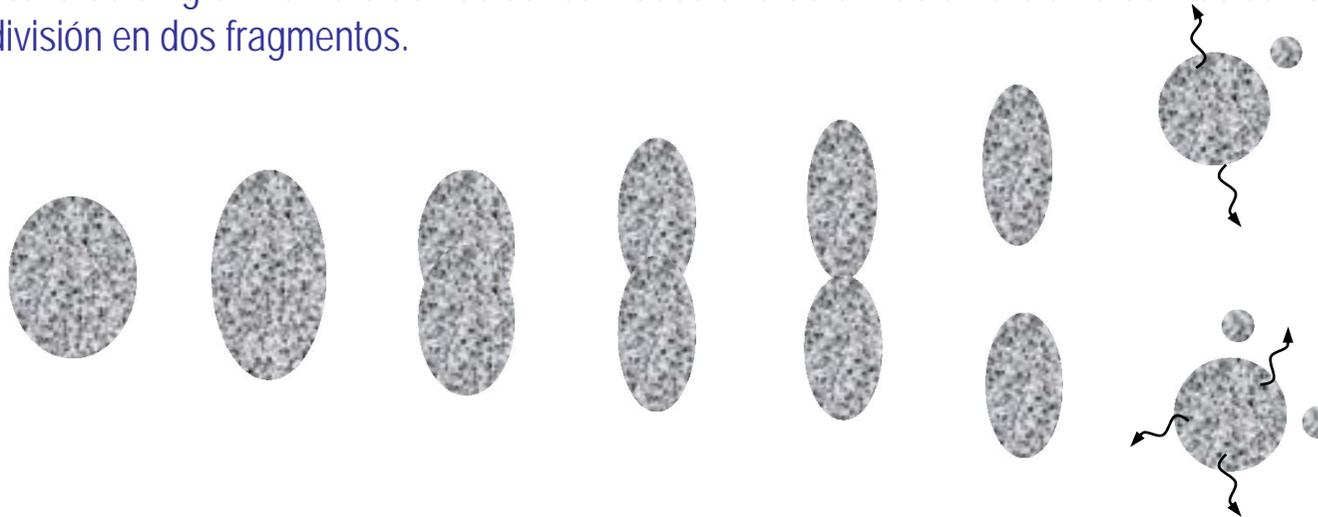


Se ha observado experimentalmente casos de deformación máxima

$$\beta \approx 0.6 \rightarrow 2:1$$

# Fisión nuclear: balance energético

La fisión nuclear es el movimiento colectivo de mayor escala que se conoce. En él la excitación colectiva de un gran número de nucleones induce una deformación extrema del núcleo llegando a su división en dos fragmentos.



Balance energético:

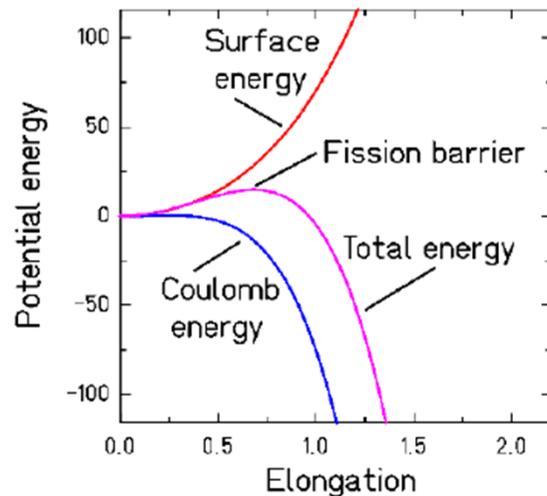
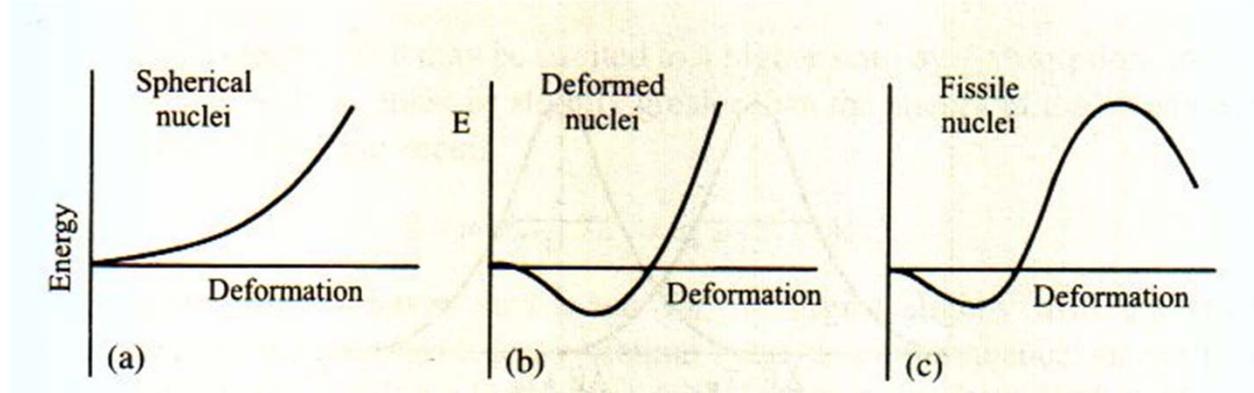
$$Q = (m - m_1 - m_2)c^2 = B_1 + B_2 - B > 0$$

$$Q = T_1 + T_2 + \sum_i T_{n_i} + \sum_j E_{\gamma_j}$$

$$T_1 + T_2 = 1.44 \frac{Z_1 \cdot Z_2}{R_1 + R_2}$$

# Fisión nuclear: barrera de fisión

Aunque el balance energético sea favorable ( $Q > 0$ ) la probabilidad de que un núcleo fisione está determinada por la variación de la energía de ese núcleo en función de su deformación.



La variación de la energía de un núcleo en función de su deformación está determinada por la variación de su energía superficial y Coulombiana con la deformación.

La competición entre estos dos términos de energía dan lugar a la aparición de una barrera en el potencial de un núcleo en función de su deformación. En principio esta barrera inhibe el proceso de fisión aunque energéticamente sea favorable..



# Fisión nuclear: barrera de fisión

Podemos calcular como varía la energía potencial del núcleo en función de su deformación a partir de las dependencias de las energías de superficie y Coulombiana con la deformación:

$$V(\alpha) = E_s(\alpha) - E_c(\alpha)$$

Para calcular la evolución de las energías de superficie y Coulombiana con la deformación debemos partir de las expresiones que caracterizan una superficie nuclear deformada. Pero como la fisión preserva la simetría cilíndrica ( $m=0$ ) podemos sustituir los armónicos esféricos por polinomios de Legendre.

$$R(\theta, \varphi) = R_\alpha \left[ 1 + \sum_{\lambda, \mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_\lambda^\mu(\theta, \varphi) \right] \approx R_\alpha \left[ 1 + \left( \frac{2\lambda + 1}{4\pi} \right)^{1/2} \sum_{\lambda} \alpha_\lambda P_\lambda(\cos \theta) \right]$$

Si nos limitamos a deformaciones cuadrupolares ( $\lambda=2$ ):

$$R(\theta) = R_\alpha \left[ 1 + a_2 P_2(\cos \theta) \right] \quad a_2 = \left( \frac{5}{4\pi} \right)^{1/2} \alpha_2$$

La energía superficial puede calcularse como:  $E_s = \sigma \int dS$

$$dS = \frac{R^2 d\Omega}{n}$$

donde  $n$  es un vector unitario normal a la superficie que podemos calcular a partir de la expresión:

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla R_\alpha(\theta)}{|\nabla R_\alpha(\theta)|}$$

# Fisión nuclear: barrera de fisión

Teniendo en cuenta:

$$\left. \begin{aligned} R_\alpha &= \frac{R}{1 + a_2 P_2(\cos \theta)} \\ \nabla &= \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial R} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{aligned} \right\} \nabla R_\alpha = \frac{1}{1 + a_2 P_2(\cos \theta)} \mathbf{e}_r - \frac{a_2}{(1 + a_2 P_2(\cos \theta))^2} \frac{\partial P_2(\cos \theta)}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta$$

A partir de estas ecuaciones podemos determinar la superficie nuclear como:

$$S = R_\alpha^3 \int \frac{(1 + a_2 P_2(\cos \theta))^2}{R_\alpha} \left( 1 + \frac{a_2^2 (\partial P_2(\cos \theta) / \partial \theta)^2}{(1 + a_2 P_2(\cos \theta))^2} \right)^{1/2} d\Omega$$

Desarrollando en serie en función de  $a_2$  y teniendo en cuenta:  $\int_{-1}^1 P_2(\cos \theta) d \cos \theta = 0$

$$S = 2\pi R_\alpha^2 \int_{-1}^1 \left\{ 1 + a_2^2 \left[ P_2^2(\cos \theta) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial P_2(\cos \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] \right\} d(\cos \theta)$$

Haciendo el cambio de variable ( $x = \cos \theta$ ) e introduciendo las expresiones de  $P_2$  y su derivada respecto a  $\theta$ .

$$S = 2\pi R_\alpha^2 \left[ 2 + a_2^2 \left( \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 9x^2(1+x^2) dx \right) \right] = 4\pi R_\alpha^2 \left( 1 + \frac{4}{5} a_2^2 + L \right)$$

## Fisión nuclear: barrera de fisión

Si expresamos  $R_\alpha$  en función del radio de una esfera con volumen equivalente  $R_o$ :

$$\frac{4}{3}\pi R_o^3 = \int dV = \int d\Omega \int_0^{R(\theta)} R^2 dR = \frac{1}{3} \int R^3(\theta) d\Omega = \frac{R_\alpha^3}{3} \int (1 + 3a_2 P_2(\cos\theta) + 3a_2^2 P_2^2(\cos\theta) + a_2^3 P_2^3(\cos\theta)) d\Omega$$

Limítámonos hasta tercer orden en el desarrollo en  $a_2$ :

$$R_\alpha = R_o \left( 1 - \frac{1}{5} a_2^2 - \frac{2}{105} a_2^3 + \mathbf{L} \right)$$

Sustituyendo en las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$S = 4\pi R_o^2 \left[ 1 + \frac{2}{5} a_2^2 - \frac{4}{105} a_2^3 + \mathbf{L} \right] \Rightarrow E_S = E_S^o \left[ 1 + \frac{2}{5} a_2^2 - \frac{4}{105} a_2^3 + \mathbf{L} \right]$$

De forma análoga podemos determinar la variación de energía Coulombiana con la deformación:

$$E_C = E_C^o \left[ 1 - \frac{1}{5} a_2^2 - \frac{4}{105} a_2^3 + \mathbf{L} \right]$$

La variación total de la energía del núcleo con la deformación será:

$$\Delta E(a_2) = E_S(a_2) + E_C(a_2) - E_S^o - E_C^o = E_S^o \left[ \frac{2}{5} (1-x) a_2^2 - \frac{4}{105} (1+2x) a_2^3 + \mathbf{L} \right]$$

Parámetro de fisilidad:

$$x = \frac{E_C^o}{2E_S^o} = \frac{Z^2}{A} \frac{a_C}{2a_S}$$

# Fisión nuclear: barrera de fisión

La barrera de fisión puede obtenerse aplicando la condición de máximo a la ecuación anterior.

$$\frac{\partial \Delta E}{\partial a_2} = 0 = E_S^o \left[ \frac{4}{5} (1-x)a_2 - \frac{4}{36} (1+2x)a_2^2 \right]$$

Esta ecuación tiene dos soluciones:

$$a_2 = 0 \quad \text{mínimo: estado fundamental}$$

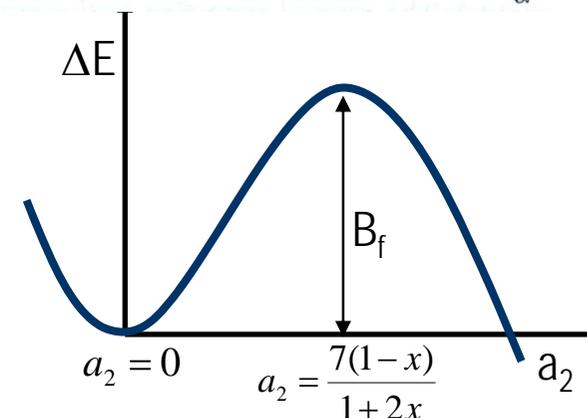
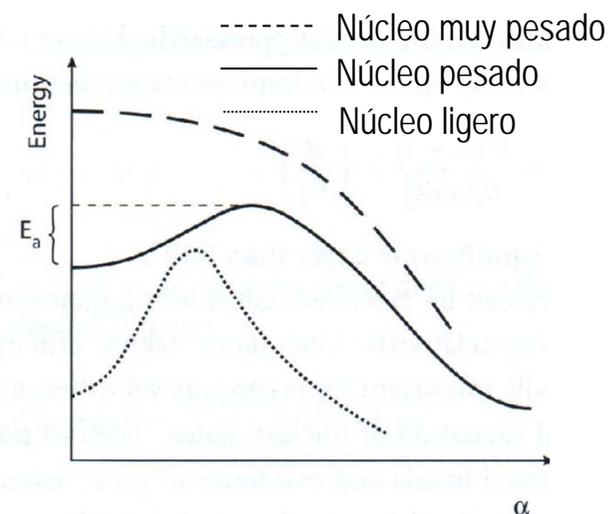
$$a_2 = \frac{7(1-x)}{1+2x} \quad \text{máximo: deformación correspondiente al máximo de la barrera}$$

A partir de este resultado podemos obtener la altura de la barrera:

$$B_f = \frac{98}{15} \frac{(1-x)^3}{(1+2x)^2} E_S^o$$

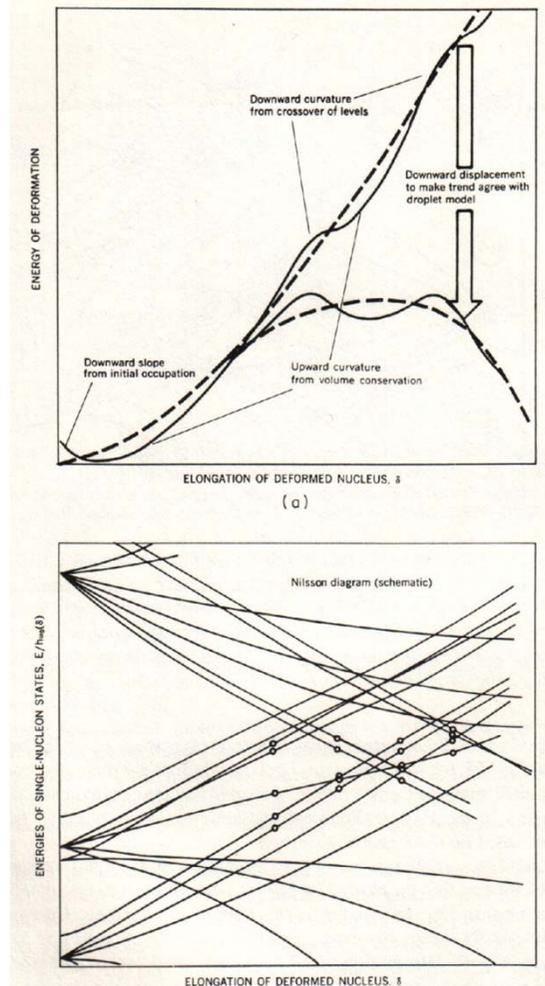
La barrera de fisión crece inversamente con el parámetro de fisidad:

$$x = \frac{E_C^0}{2E_S^o} = \frac{Z^2}{A} \frac{a_C}{2a_S} = \frac{1}{51.66} \frac{Z^2}{A}$$



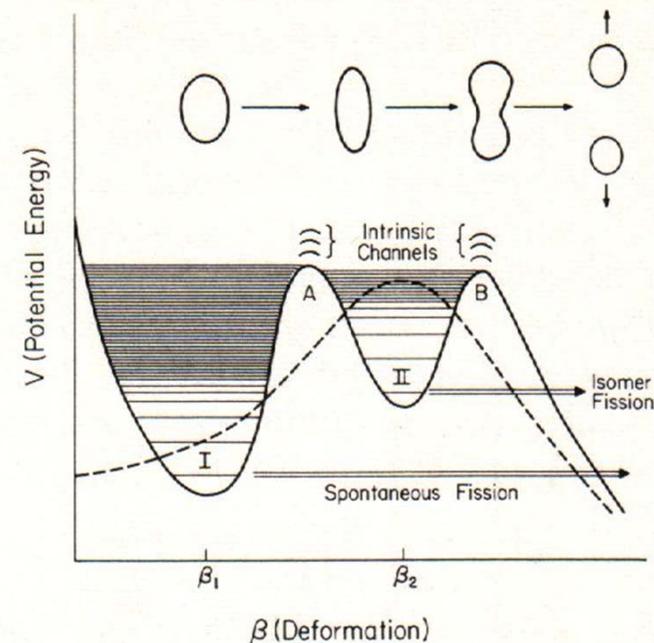
# Barrera de fisión: efectos de estructura

El modelo de la gota líquida que hemos utilizado para calcular la barrera de fisión no tienen en cuenta la Estructura del núcleo.



Un cálculo realista proporciona las siguientes conclusiones:

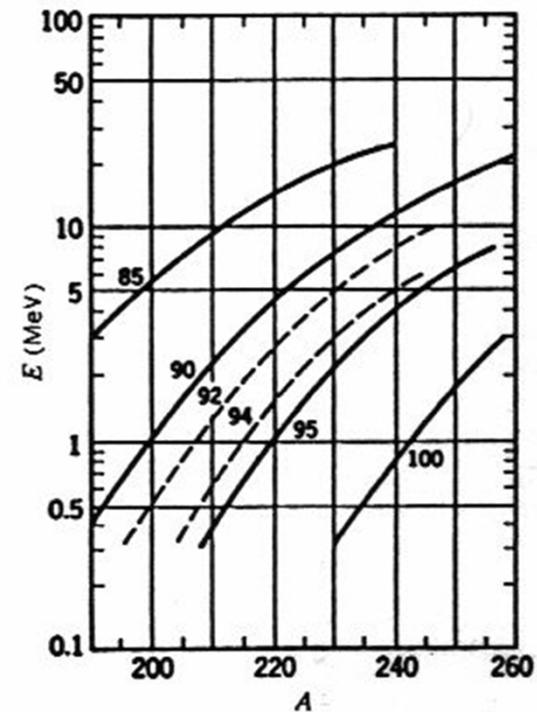
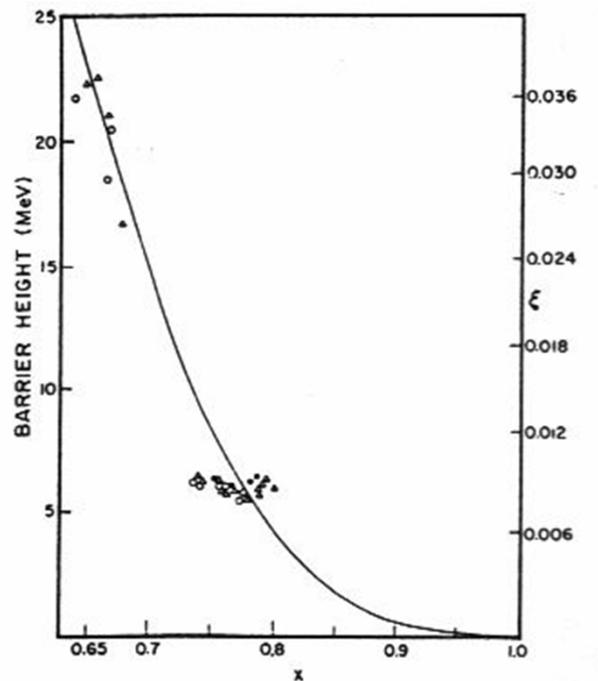
- los núcleos pueden tener un estado fundamental deformado
- el potencial puede presentar varias barreras



# Fisión nuclear: barrera de fisión

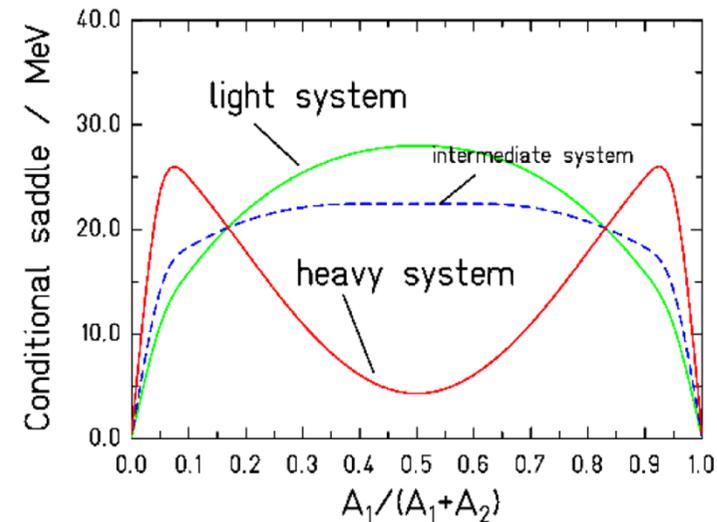
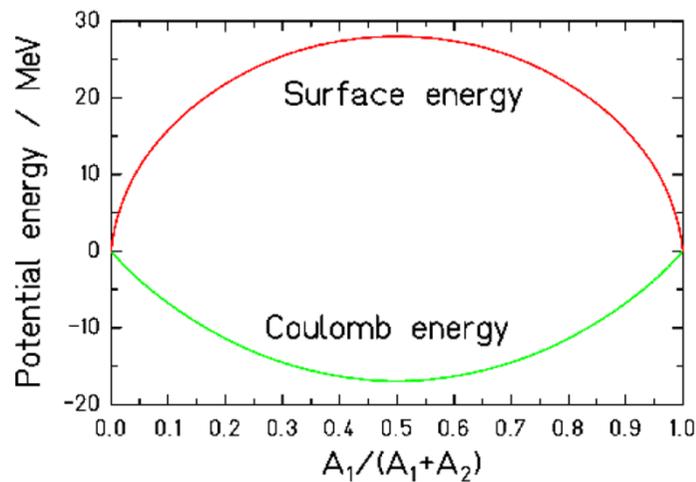
La barrera de fisión disminuye al aumentar Z y disminuir A:

$$x = \frac{E_C^0}{2E_s^0} = \frac{Z^2 a_c}{A 2a_s} = \frac{1}{51.66} \frac{Z^2}{A}$$



# Distribución de masa de fragmentos de fisión

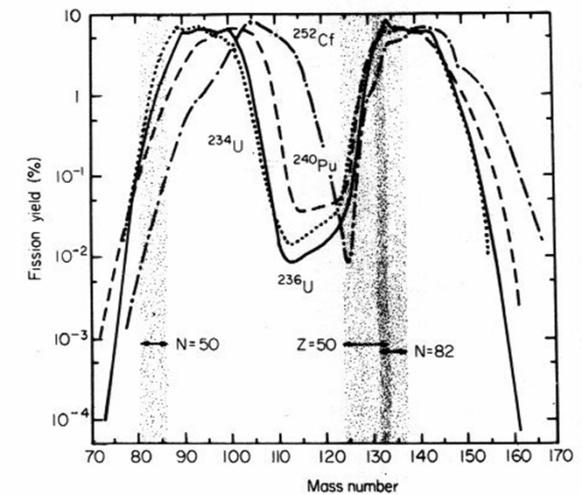
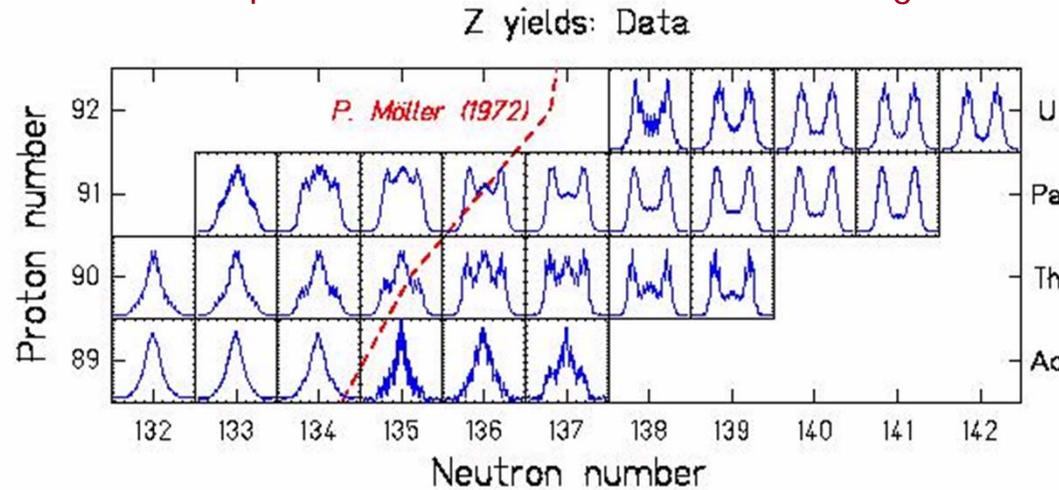
La distribución de masa de los fragmentos de fisión resultantes estará definida por la variación de la energía del núcleo en función de la asimetría de masas. Tomando como ejemplo el modelo de la gota líquida debemos estudiar cómo varían las energías de superficie y Coulombianas con la asimetría de masas. El mínimo de energía definirá la asimetría del sistema final.



Según el modelo de la gota líquida los núcleos fisionantes pesados favorecen configuraciones finales Simétricas mientras que los ligeros prefieren las asimétricas (evaporación de nucleones o clusters).

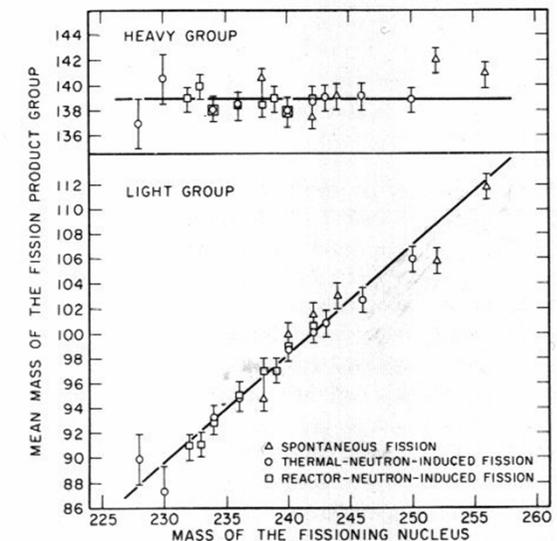
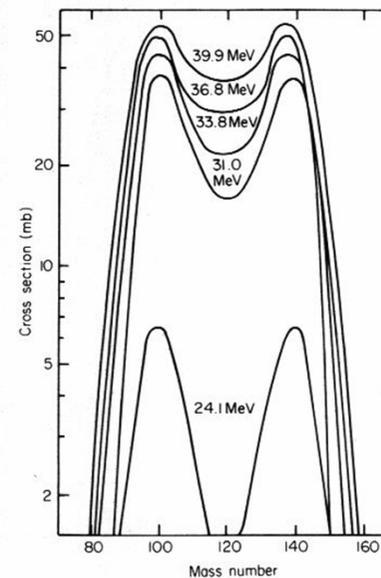
# Distribución de masa de fragmentos de fisión

✓ Medidas experimentales de distribuciones de fragmentos de fisión:



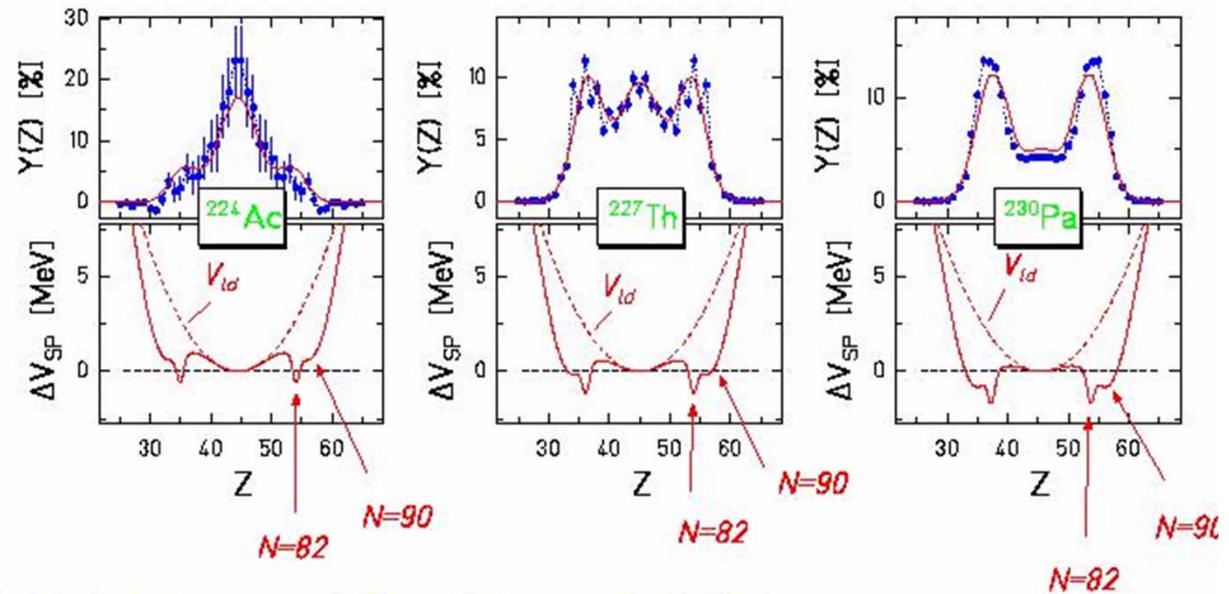
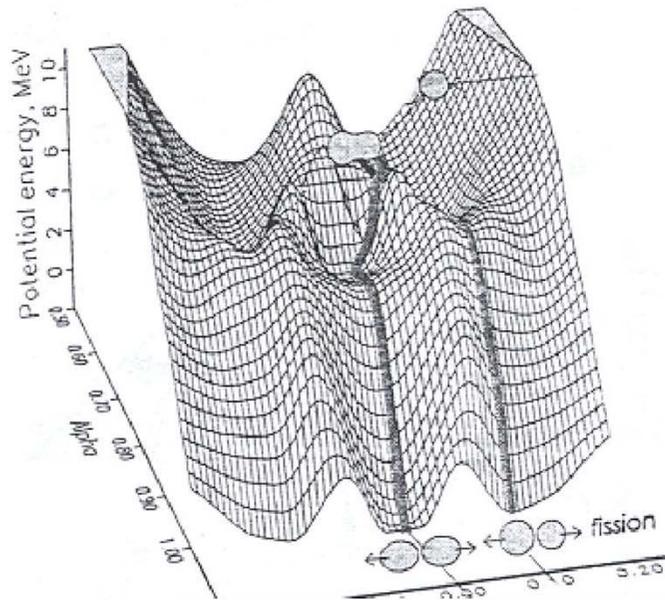
Experimentalmente observamos:

- los núcleos más pesados fisión asimétricamente
- el fragmento más pesado siempre tiene la misma masa  $A \sim 138$
- la asimetría desaparece con la energía a la que se induce la fisión



# Fragmentos de fisión: efectos de estructura

Como en el caso de la barrera, un cálculo realista de la asimetría de los fragmentos de fisión debe tener en cuenta la estructura del núcleo.



$$Y(\eta) \propto \exp \left\{ 2\sqrt{a} [E^* - U(\eta)] \right\} \rightarrow \rho(E^*) \exp \left\{ -\frac{(\eta - \eta_{cn}/2)^2}{2\sigma_\eta^2} \right\}$$

$$2\sigma_\eta^2 = \frac{T}{C_\eta}$$

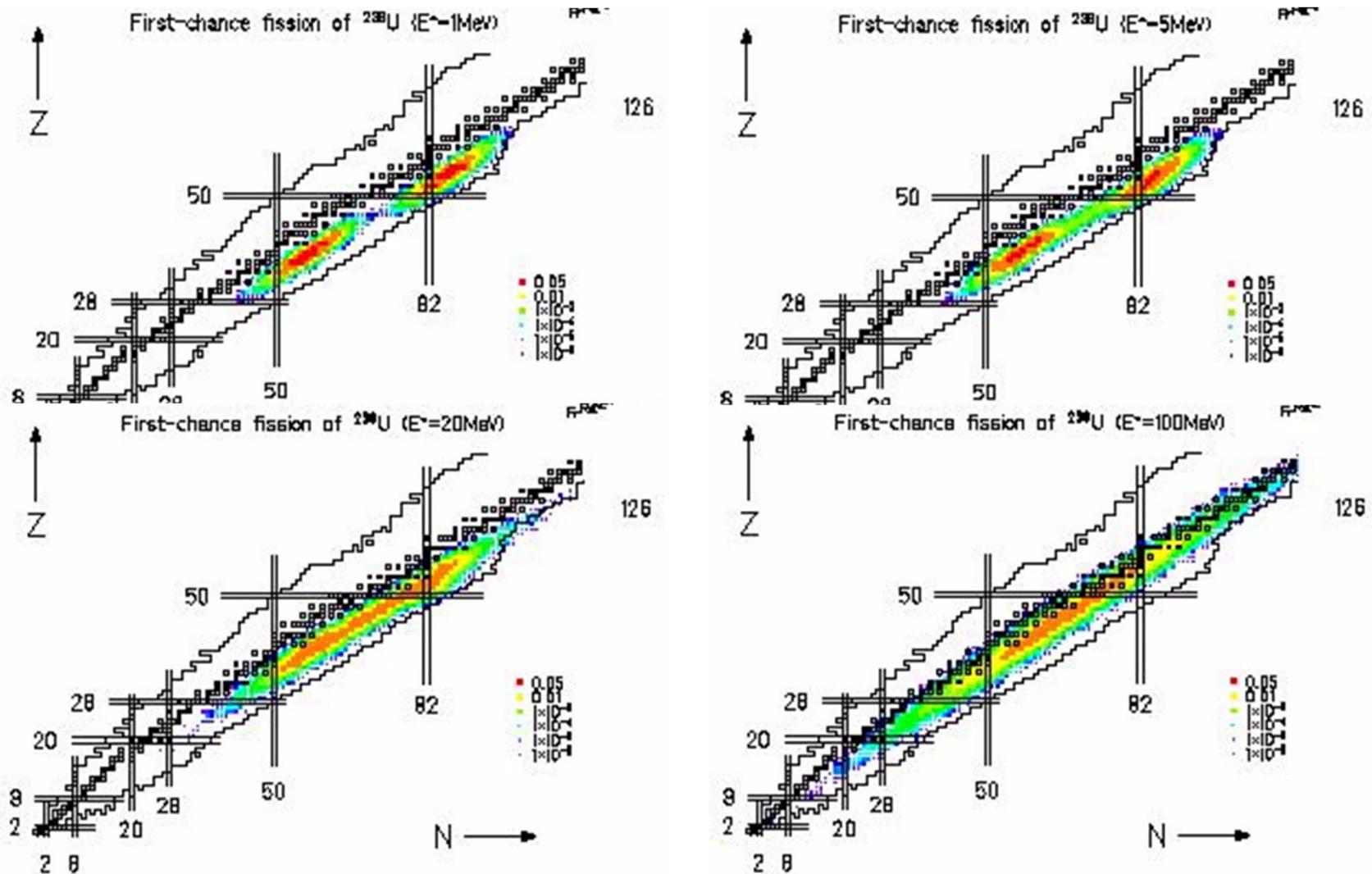
$\eta = A$  (mass split) or  $N/Z$

$C_\eta =$  stiffness of the potential

$$U(\eta) = U_{\text{mac}}(\eta) + U_{\text{sh},1}(\eta) + U_{\text{sh},1}(\eta_{\text{cn}} - \eta) + U_{\text{sh},2}(\eta) + U_{\text{sh},2}(\eta_{\text{cn}} - \eta)$$

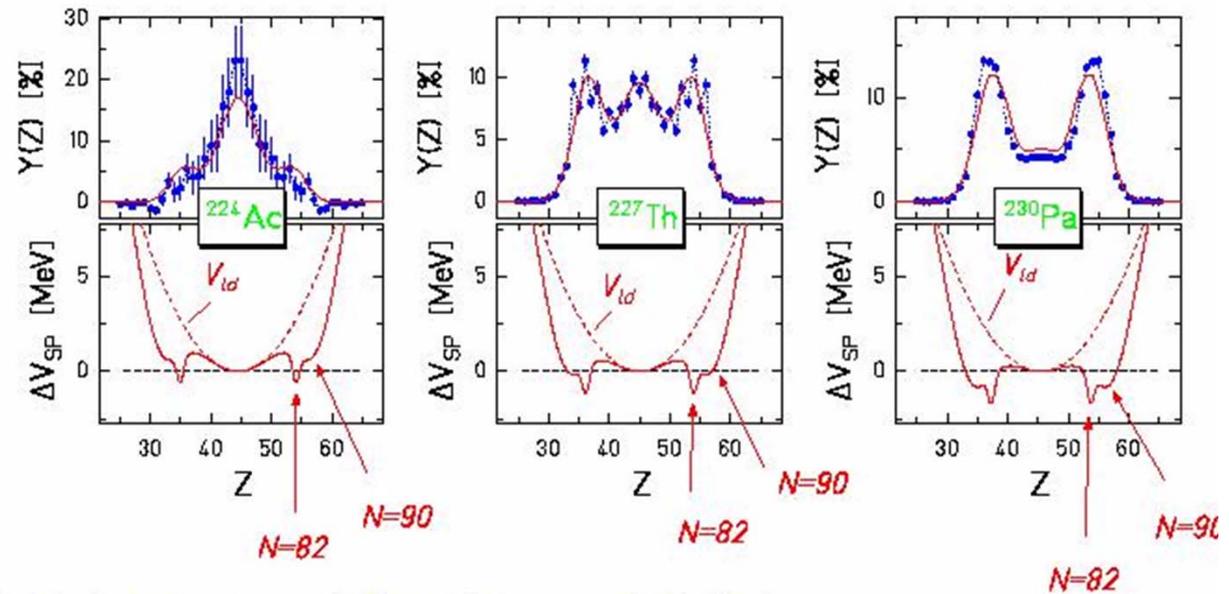
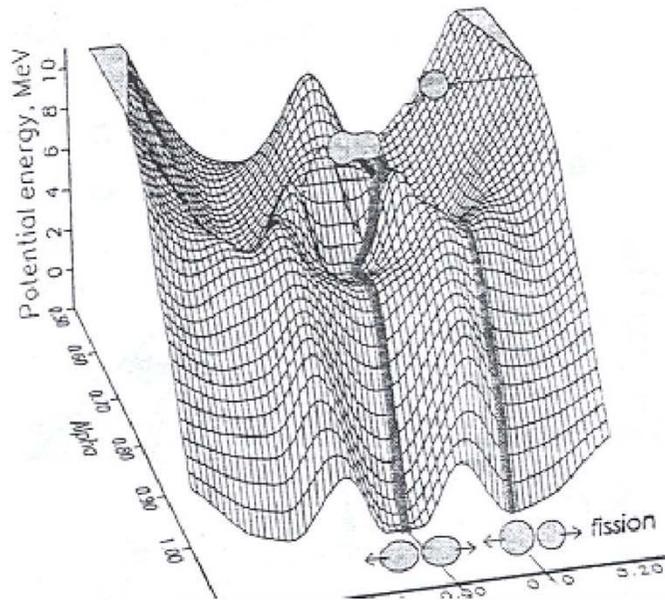
$$U_{\text{mac}}(\eta) = C_\eta(\eta - \eta_{\text{cn}}/2)^2$$

# Mecanismos de fisión: fisión espontánea



# Fragmentos de fisión: efectos de estructura

Como en el caso de la barrera, un cálculo realista de la asimetría de los fragmentos de fisión debe tener en cuenta la estructura del núcleo.



$$Y(\eta) \propto \exp \left\{ 2\sqrt{a} [E^* - U(\eta)] \right\} \rightarrow \rho(E^*) \exp \left\{ -\frac{(\eta - \eta_{cn}/2)^2}{2\sigma_\eta^2} \right\}$$

$$2\sigma_\eta^2 = \frac{T}{C_\eta}$$

$\eta = A$  (mass split) or  $N/Z$

$C_\eta =$  stiffness of the potential

$$U(\eta) = U_{\text{mac}}(\eta) + U_{\text{sh},1}(\eta) + U_{\text{sh},1}(\eta_{\text{cn}} - \eta) + U_{\text{sh},2}(\eta) + U_{\text{sh},2}(\eta_{\text{cn}} - \eta)$$

$$U_{\text{mac}}(\eta) = C_\eta(\eta - \eta_{\text{cn}}/2)^2$$

# Mecanismos de fisión: fisión espontánea

Núcleos muy pesados ( $Z^2/A > 45$ ) pueden fisionar de forma espontánea por penetración cuántica de la barrera.

$$P = \exp\left\{-\frac{2}{h} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} [2B(V(\varepsilon) - T)]^{1/2} d\varepsilon\right\}$$

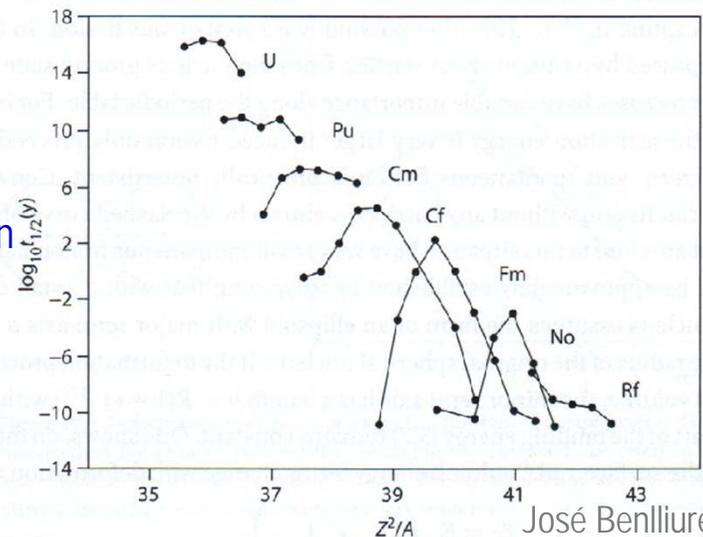
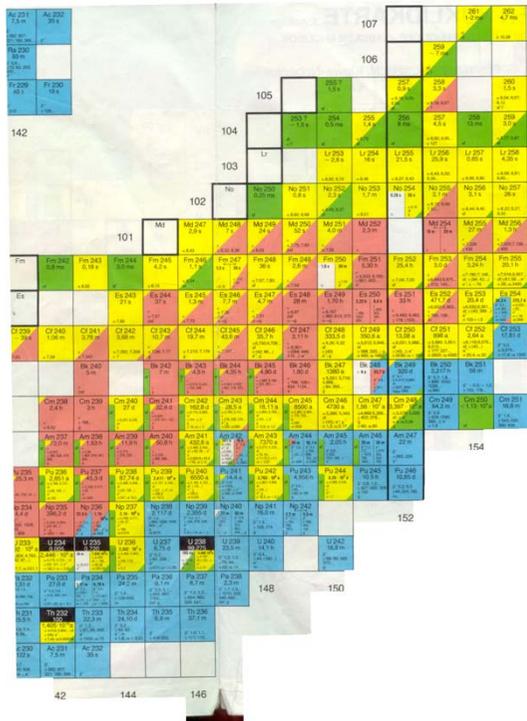
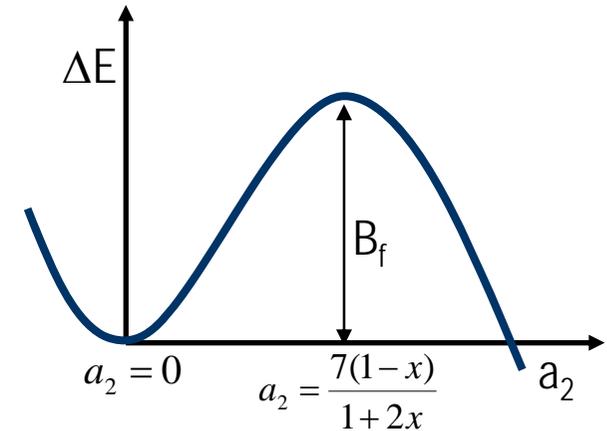
Si consideramos una barrera parabólica:

$$P = \exp\left\{-\pi(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \left(\frac{B_f}{2h^2}\right)^{1/2}\right\}$$

La vida media de la fisión espontánea podemos calcularla como:

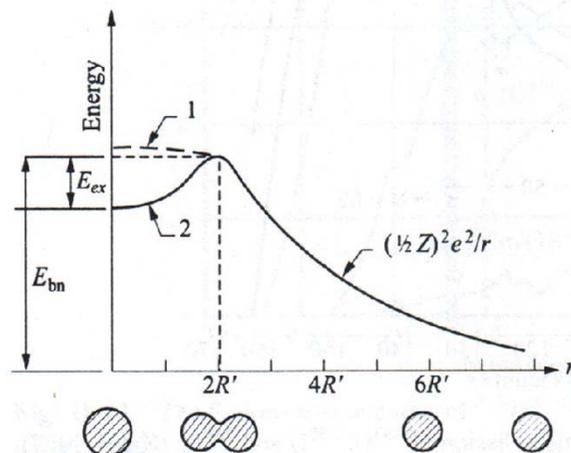
$$\tau = \frac{h}{\Gamma} = \frac{1}{n \cdot P}$$

donde P es la probabilidad de penetración de la barrera y  $n = \omega/2\pi = 2.5 \cdot 10^{20}$  es la frecuencia de asalto de la barrera que podemos estimar asumiendo un oscilador con  $h\omega = 1$  MeV para el estado fundamental



# Mecanismos de fisión: fisión inducida por reacciones

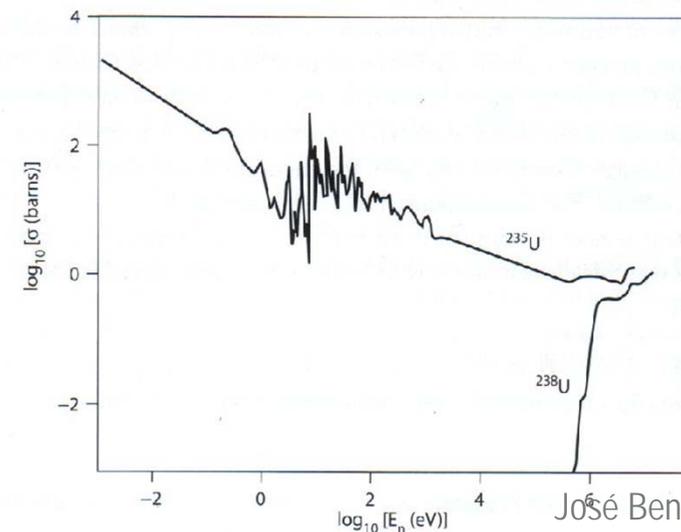
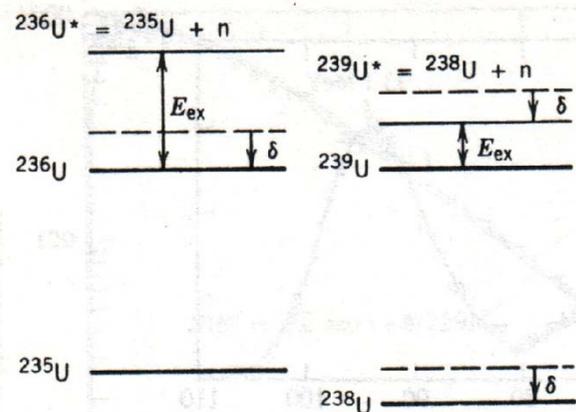
Una reacción nuclear como la captura de un neutrón puede comunicarle al núcleo una energía de excitación interna igual o superior a la altura de la barrera. Esa energía interna puede iniciar un movimiento colectivo de deformación hasta que el núcleo alcance la deformación de la barrera.



En estos casos la probabilidad de fisión no sólo depende de la barrera sino de los efectos de estructura. El  $^{236}\text{U}$  y el  $^{239}\text{U}$  tienen una barrera similar, 6.2 y 6.6 MeV respectivamente. Sin embargo su probabilidad de fisión por captura de un neutrón es muy diferente debido a la energía de apareamiento:

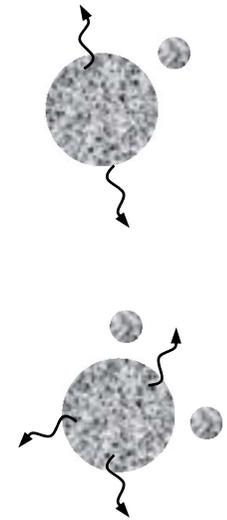
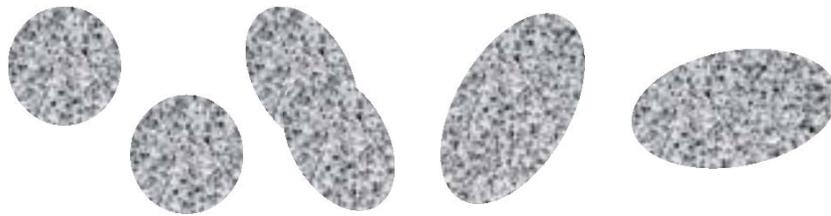
$$E^* = m(^{236}\text{U}^*) - m(^{236}\text{U}) = m(^{235}\text{U}) + m_n - m(^{236}\text{U}) = 6.5 \text{ MeV}$$

$$E^* = m(^{239}\text{U}^*) - m(^{239}\text{U}) = m(^{238}\text{U}) + m_n - m(^{239}\text{U}) = 4.8 \text{ MeV}$$



# Mecanismos de fisión: fisión inducida por rotación

Las reacciones entre iones pesados con parámetro de impacto no nulo producen un núcleo compuesto en rotación. La fuerza centrífuga hace disminuir la barrera de fisión.



$$V_{\text{efec}} = V_N + \frac{Z_1 \cdot Z_2 e^2}{R} + \frac{\hbar l(l+1)}{2\mu R^2}$$

