XXXV Olimpiada Matem tica Espa ola

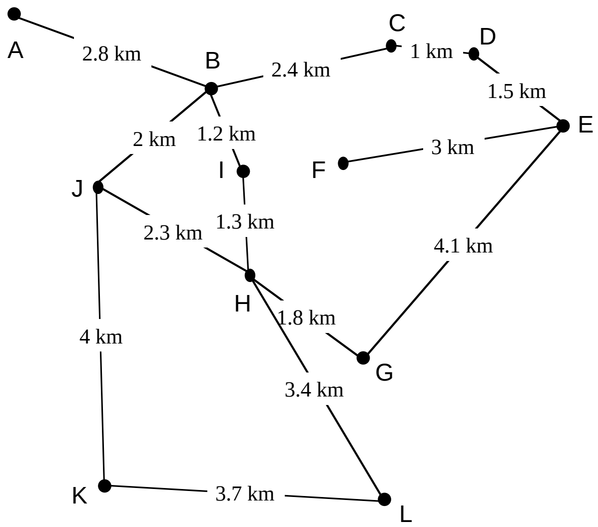
Fase de Galicia, enero de 1999

1. Como sabes, 1999 é Ano Santo, como tódoslos anos nos que o 25 de xullo cae en domingo. A existencia de anos bisiestos é responsable de que a separación entre os anos santos non sexa uniforme. Demostra que, anque poden llegar a pasar ata 11 anos entre dous anos santos consecutivos, nunca houbo nin haberá década sen ano santo.

   <u>nota</u>: Enténdese que as décadas cóntanse da forma #0, #1, #2, … , #8 y #9

2. O gráfico que acompaña é un esquema das stradas e pistas dun concello da parte oriental de Galicia.
   Coa nevada caída o día de fin de ano, os responsables de Protección Civil víronse na obriga de quita-la neve para comunica-los diferentes pobos do concello.

   Elabora unha estratexia para conseguir que ante una situación de emerxencia coma ésta, limpiando o menor número posible de quilómetros, non quede ningún pobo incomunicado. Indica por onde hai que empezar, e o método para decidir en que dirección seguir.
   Aplica a estratexia ó caso concreto deste concello, e determina o número mínimo de quiilómetros que hai que limpar.



   <u>nota</u>: Non se trata de minimiza-lo camiño percorrido, somentes os quilómetros limpados

3. Considéranse seis puntos no espacio, de xeito que non haxa tres deles nunha mesma recta, nin catro nun mesmo plano. Se unimos cada par de puntos por un segmento, ¿cántos triángulos se forman?. Píntanse algúns destes segmentos de cor verde e os demáis de cor azul. Demostra que necesariamente hai un triángulo cos tres lados da mesma color. Comproba que se tomamos cinco puntos, en vez de seis, isto non sucede.

``no se permite usar calculadora!!

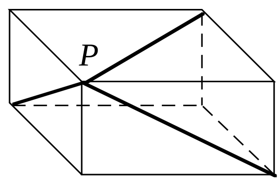
XXXV Olimpiada Matem tica Espa ola

Fase de Galicia, enero de 1999

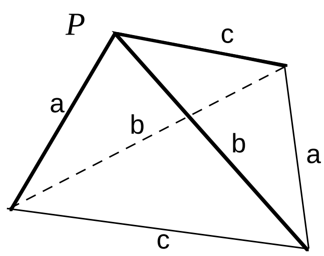
4. Analiza-las relacións entre os tres enunciados seguintes, relativos a tres semirectas no espacio que salen dun punto P : (ver exemplo máis abaixo)

   a) A suma dos tres ángulos que forman entre sí estas semirectas é 180°.

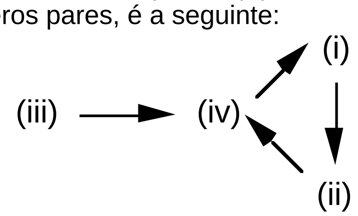
   b) O punto *P* é o vértice dun paralelepípedo rectángulo, e as tres semirectas conteñen as diagonais dos tres rectángulos que se cortan en *P*.



   c) As tres semirectas conteñen tres aristas nun vértice *P* dun tetraedro no que aristas opuestas (aquelas que non comparten vértice) son de igual lonxitude.



<u>Exemplo</u>. A relación entre os catro enunciados, relativos a un número natural *n*: (i) *n* é un número par distinto de 0, (ii) *n* é suma de dous números impares, (iii) *n* é suma de dous números pares distintos de cero e (iv) *n* é suma de dous números pares, é a seguinte:



poiss, se é certo (iii), entón tamén o é (iv), xa que toda suma de pares non nulos é suma de pares; se é certo (iv), tamén é certo (i), pois toda suma de dous pares é par; … ; (iv) pode ser certo sin selo (iii), exemplo 2 = 2 +0 non é suma de pares distintos de cero; … etc.

5. Determinar tódolos posibles valores de $p+q$, con p e q p números reais distintos, tales que:

$$p = (4-q)\, q$$
$$q = (4-p)\, p$$

6. ¿Cántas listas de *n* números se poden formar con 0's e 1's, contendo un número par de 1's?

   ¿Cántos rectángulos de $m\times n$ números se poden formar con 0's e 1's, de modo que tódaslas líñas horizontais conteñan un número par de 1's?

$$\begin{array}{c|c} \overline{\qquad\qquad n \qquad\qquad} & \\ \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & 1 \\ 0 & 1 & 1 & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ : & : & : & : & : & : & : & : \\ 1 & 1 & 0 & . & . & . & . & 0 \end{matrix} & m \end{array}$$

   ¿En cántos destes tódaslas liñas verticais conteñen tamén un número par de 1's?

``no se permite usar calculadora!!