



XXXVII Olimpiada Matemática

Fase Galega

venres 19 de xaneiro de 2001



Problema 1. Determina-lo número natural n que é o produto dos primos p , q e r , sabendo que $r - q = 2p$ e $rq + p^2 = 676$.

Problema 2. Un cristaleiro dispón dunha peza de vidro de forma triangular. Usando os seus coñecementos de xeometría, sabe que podería cortar dela un círculo de radio r . Demostra que, para calquera número natural n , da peza triangular pode obter n^2 círculos de radio $\frac{r}{n}$. (supoñemos que se poden face-los cortes perfectos)

Problema 3. Nove persoas celebraron catro xuntanzas diferentes sentados arredor dunha mesa circular. ¿Puidérono facer sen que haxa dúas desas persoas que se sentasen unha ó pé da outra en máis dunha xuntanza? Razoala resposta.

Nota:

- Tódalas respostas teñen que ser razoadas.
- Non se permiten calculadoras



XXXVII Olimpiada Matemática

Fase Galega

sábado 20 de xaneiro de 2001



Problema 4. Consideramos o conxunto $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ dos números naturais e a aplicación $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ que cumpre as dúas seguintes condicións:

a) $f(f(n)) = n$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

b) $f(f(n)+1) = \begin{cases} n-1, & \text{se } n \text{ par} \\ n+3 & \text{se } n \text{ impar} \end{cases}$

Determina-lo valor de $f(n)$ para cada $n \in \mathbf{N}$ observando previamente que todo número n é da forma $f(m)$, para algún m , que se $f(a) = f(b)$, entón $a = b$, e que, ó non poder ser nunca $f(f(n)+1) = 2$, tén que ser $f(1) = 2$.

Problema 5. Considerámo-los seguintes 27 puntos dun cubo: o centro (1), os centros das caras (6), os vértices (8) e mailos centros das aristas (12). Coloreamos cada un deses puntos de azul ou de vermello. ¿Poderá facerse de xeito que non teñamos tres puntos da mesma cor aliñados? Demostralo.

Problema 6. Durante o pasado temporal, debido a un corte no subministro eléctrico na Costa da Morte foi preciso facer funcionar o faro de Fisterra coa axuda dun xenerador alimentado con gasóleo. O xenerador consume 6 litros de gasóleo cada hora, e medio litro máis cada vez que hai que botalo a andar (inicialmente, está parado). O faro non pode deixar de funcionar durante máis de 10 minutos seguidos, e cando funciona tén que facelo durante alomenos 15 minutos seguidos. Nas 10 horas exactas que durou o apagón durante a noite ¿cántos litros de gasóleo precisou o fareiro, coma mínimo, para cumprir coas normas de funcionamento do faro?

Nota:

- Tódalas respostas teñen que ser razoadas.
-