

Problema 1. Determina-lo número natural n que é o produto dos primos p , q e r , sabendo que $r - q = 2p$ e $rq + p^2 = 676$.

Solución:

Tomar $x = r - p = q + p$. Entón,

$$x^2 = (r - p)(q + p) = rq + (r - q)p - p^2 = rq + 2p^2 - p^2 = rq + p^2 = 676 = 26^2$$

Polo tanto, p é un número primo tal que $26 - p$ e mais $26 + p$ son tamén primos. Dos posibles primos p menores que 26, isto só é certo para $p = 3$.

De onde, $p = 3$, $q = 23$, $r = 29$ e, polo tanto, $n = p \cdot q \cdot r = 2001$.

Problema 2. Un cristaleiro dispón dunha peza de vidro de forma triangular. Usando os seus coñecementos de xeometría, sabe que podería cortar dela un círculo de radio r . Demostra que, para calquera número natural n , da peza triangular pode obter n^2 círculos de radio r/n (supoñendo que se poidan facer sempre os cortes perfectos).

Solución:

¡Enuncia e resolve o mesmo problema para unha peza cadrada!

Problema 3. Nove persoas celebraron catro xuntanzas diferentes sentados arredor dunha mesa circular. ¿Pudérono facer sen que haxa dúas desas persoas que se sentasen unha ó pé da outra en máis dunha xuntanza? Razoa-la resposta.

Solución:

A resposta é SÍ, pódense celebra-las catro xuntanzas nas condicións do enunciado.

O número de parellas diferentes en cada xuntanza é de 9, intervindo cada individuo exactamente en dúas, e verificándose que se as parellas (a_1, a_2) , (a_2, a_3) , $\dots$ e (a_n, a_1) están e son todas distintas, entón $n = 9$. O número total de parellas diferentes que se poden establecer con 9 individuos é igual a $(9 \cdot 8)/2 = 36$, co que existe a posibilidade de repartilas en catro grupos de 9. Ademais cada individuo forma parte de 8 parellas, o que non impide que en cada grupo apareza dúas veces. Trátase pois de ir repartindo os elementos por riba da diagonal dunha matriz 9×9 cumprindo a terceira condición, coma na figura

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		●	■	⊕	◆	⊕	◆	■	●
2			●	■	⊕	◆	⊕	◆	■
3				●	■	◆	◆	⊕	⊕
4					●	■	⊕	◆	◆
5						●	■	⊕	◆
6							●	■	⊕
7								●	■
8									●
9									

primeira xuntanza: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

segunda xuntanza: 1, 3, 5, 7, 9, 2, 4, 6, 8

terceira xuntanza: 1, 4, 7, 2, 5, 8, 3, 9, 6

cuarta xuntanza: 1, 5, 9, 4, 8, 2, 6, 3, 7

outro exemplo, pode ser

Primera xuntanza: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
 Segunda xuntanza: 1, 3, 5, 7, 9, 4, 6, 2, 8
 Terceira xuntanza: 1, 4, 7, 3, 8, 5, 2, 9, 6
 Cuarta xuntanza: 1, 5, 9, 3, 6, 8, 4, 2, 7

Problema 4. Considerámo-lo conxunto $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ dos números naturais e a aplicación $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ que cumpre as dúas seguintes condicións:

a) $f(f(n)) = n$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

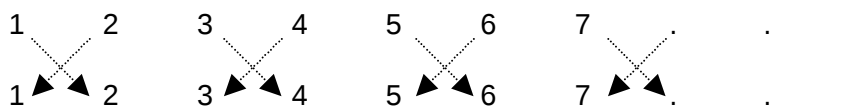
$$b) f(f(n) + 1) = \begin{cases} n-1, & \text{se } n \text{ par} \\ n+3 & \text{se } n \text{ impar} \end{cases}$$

Determina-lo valor de $f(n)$ para cada $n \in \mathbf{N}$ observando previamente que todo número n é da forma $f(m)$, para algún m , que se $f(a) = f(b)$, entón $a = b$, e que, ó non poder ser nunca $f(f(n) + 1) = 2$, téñ que ser $f(1) = 2$.

Solución:

A función f é claramente bixectiva, pola condición a).

Pola condición b) obsérvase que nunca se pode dar $f(f(n) + 1) = 2$, polo que forzosamente terá que ser 2 a imaxe do único elemento que non é da forma $f(n) + 1$, é dicir, de $1 f(1) = 2$.



Agora, $f(3) = f(f(1) + 1) = 1 + 3 = 4$, e así sucesivamente.

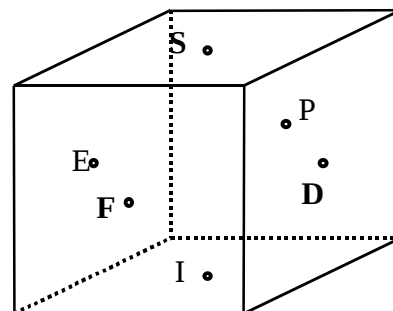
Problema 5. Considerámo-los seguintes 27 puntos dun cubo: o centro (1), os centros das caras (6), os vértices (8) e mailos centros das aristas (12). Coloreamos cada un deses puntos de azul ou de vermello. ¿Poderá facerse de xeito que non teñamos tres puntos da mesma cor aliñados? Demostralo.

Solución:

A resposta é NON.

Parece suxerente darlle nomes ás caras e, por intersección, nomealos demais elementos: **F**-frontal, **P**-posterior, **E**-esquerda, **D**-dereita, **S**-superior y **I**-inferior, referida á vista do debuxo. Deste xeito, **FS**, **FE**, **FD**, **FI**, **ES**, **EP**, **EI**, **DS**, **DP**, **DI**, **PS**, **PI** denotarán os puntos medios das aristas comúns ás caras correspondentes, e **FSD**, **FSE**, **DSP**, **ESP**, **FID**, **FIE**, **DIP**, **EIP** serán os nomes dos vértices. Só nos queda por designar o punto medio, ó que lle chamaremos **M**.

Para indicar que un punto foi coloreado de azul, ou de vermello, escribiremo-lo nome do punto seguido de (a) ou (v), respectivamente.



Partiremos de que non hai tres puntos aliñados da mesma cor e chegaremos a unha contradicción. Supoñamos, logo, que o punto medio é azul, **M(a)**. (Razonaríase de forma análoga se fose vermello.) Iso obriga a que de cada dúas caras opostas, polo menos unha teña o centro vermello. En consecuencia, haberá tres caras con centro vermello e concurrentes nun vértice. Podemos supoñer, por tanto, que temos **F(v)**, **S(v)** e **D(v)**.

Agora, distinguimos dúas posibilidades:

Caso 1: **FSD(v)**. Co que **ESP(a)** e polo tanto, aliñando co centro, **FID(v)**. Analogamente, **FSD(v)** implica **DIP(a)** e polo tanto **FSE(v)**. Chegamos á contradicción **FID(v)**, **F(v)**, **FSE(v)**.

Caso 2: $FSD(a)$. Se $FS(r)$, entón $PS(a)$ e $FS(a)$; co que chegamos á contradicción $FS(a)$, $M(a)$, $PS(a)$. Polo tanto, téñ que ser $FS(a)$. De igual modo, $DS(a)$. agora, $FSD(a)$ e $FS(a)$ implica $FSE(v)$; análogamente, $FSD(a)$ e $DS(a)$ implica $DSP(v)$. E chegamos á contradicción $FSE(v)$, $S(r)$, $DSP(v)$.

Problema 6. Durante o pasado temporal, debido a un corte no subministro eléctrico na Costa da Morte foi preciso facer funcionar o faro de Fisterra coa axuda dun xenerador alimentado con gasóleo. O xenerador consume medio litro de gasóleo en cada arrancada, e despois 6 litros mais cada hora. O faro non pode deixar de funcionar durante máis de 10 minutos seguidos, e cando funciona téñ que facelo durante alomenos 15 minutos seguidos. Nas 10 horas exactas que durou o apagón durante a noite ¿cántos litros de gasóleo precisou o fareiro, coma mínimo, para cumprir coas normas de funcionamento do faro?

Solución:

Cada 10 minutos parado afórrase 1 litro, que compensa o medio litro da nova arrancada. A idea é, polo tanto, facer o meirande número posible de paradas, e que estas sexan o máis longas posible, 10 minutos.

Sexa n o número de arrancadas, e sexa x o tempo en minutos que funciona de cada vez. Témosla ecuación seguinte:

$$600 = (1 + n) 10 + n x, \text{ de onde } 590 = n (10 + x)$$

xa que podemos tardar 10 minutos en encender, e deixarmos 10 minutos á final.

De $x \geq 15$, séguese que $n \leq \lfloor 590/25 \rfloor = 23$, e o número máximo de arrancadas será logo 23, de onde obtemos $x = 360/23$.

O consumo total será de $n (1/2) + n x (6/60) = 23/2 + 360 (6/60) = 47.5$ litros