XLVI Olimpiada Matemática Española

Primeira Fase

Primeira sesión

Venres mañá, 15 de xaneiro de 2010

1. Sexa I_n o conxunto dos n primeiros números naturais impares. Por exemplo: $I_3 = \{1, 3, 5\}$, $I_6 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, etc.

Para qué números n o conxunto I_n se pode descomponer en dúas partes (disxuntas) de forma que coincidan as sumas dos números en cada unha delas?

2. Determinar os lados do triángulo rectángulos do que se coñecen o perímetro, $p = 96$, e mais a altura sobre a hipotenusa, $h = \dfrac{96}{5}$.

3. Determinar todos os números naturais n que verifican a condición:

$$\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{2n}{3}\right] = n + 335$$

onde $[x]$ é a parte enteira de x. (Isto é, $[1{,}32] = 1$, $[2] = 2$, $\left[\dfrac{1}{2}\right] = 0$, $[\pi] = 3$, etc.)

Non está permitido o uso de calculadoras.
Cada problema puntúase sobre 7 puntos.
O tempo de cada sesión é de 3 horas e media.

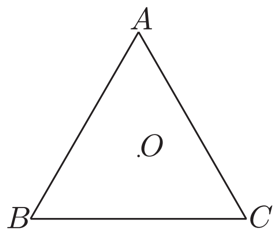
XLVI Olimpiada Matemática Española

Primeira Fase

Segunda sesión

Venres tarde, 15 de xaneiro de 2010

4. Considérase un triángulo equilátero de lado 1 e centro O, como o da figura.



Un raio parte de O e reflíctese nos tres lados, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, (na orde dada), ata alcanzar o vértice A.

Determinar a lonxitude mínima do percorrido do raio.

Nota: Cando o raio se reflicte nun lado, os ángulos de entrada (incidencia) e saída (reflexión) coinciden.

5. Calcula as solucións reais da ecuación:

$$\sqrt[4]{97-X}+\sqrt[4]{X}=5.$$

6. Dado o polinomio $P(X)=X^4+\square X^3+\square X^2+\square X+\square$, no que cada cadrado representa un oco onde se colocará un coeficiente, preséntase o seguinte xogo entre dous xogadores: Alternativamente, o primeiro e o segundo xogador elixen un oco baleiro e colocan nel un enteiro non nulo ata encher todos os catro ocos. Se o polinomio resultante ten polo menos dúas raíces enteiras gaña o segundo xogador, noutro caso o gañador é o primeiro.

Proba que, elixindo a estratexia axeitada, o primeiro xogador sempre pode gañar.

Non está permitido o uso de calculadoras.
Cada problema puntúase sobre 7 puntos.
O tempo de cada sesión é de 3 horas e media.