XLVIII Olimpiada Matemática Española

Fase Galega

Primeira sesión

Sábado mañá, 17 de decembro de 2011

1. Sexa $ABCD$ un cuadrilátero convexo e P un punto interior. Determinar qué condicións deben cumprir o cuadrilátero e o punto P para que os catro triángulos PAB, PBC, PCD e PDA teñan a mesma área.

2. Sexan a, b e c as lonxitudes dos lados dun triángulo ABC. Se

$$b(a+b)(b+c) = a^3 + b(a^2+c^2) + c^3,$$

demostrar que a medida (en radiáns) dos ángulos A, B e C cumpre a relación

$$\frac{1}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} + \frac{1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}} = \frac{2}{\sqrt{A}+\sqrt{C}}.$$

3. Temos unha colección de esferas iguais que apilamos formando un tetraedro cuxas aristas teñen todas n esferas. Calcular, en función de n, o número total de puntos de tanxencia (contactos) entra as esferas do montón.

Non está permitido o uso de calculadoras.
Cada problema puntúase sobre 7 puntos.
O tempo de cada sesión é de 3 horas e media.

XLVIII Olimpiada Matemática Española

Fase Galega

Segunda sesión

Sábado tarde, 17 de decembro de 2011

4. Determinar todas as funcións reais continuas $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ que cumpren, para todo x real positivo, a condición

$$x + \frac{1}{x} = f(x) + \frac{1}{f(x)}$$

5. Consideremos o número enteiro positivo

$$n = 2^r - 16^s$$

onde r e s son tamén enteiros positivos. Determinar as condicións que deben cumprir r e s para que o resto da división de n por 7 sexa 5. Determinar o menor número que cumpre esta condición.

6. Os puntos A_1, A_2, $\ldots$, A_{2n} son os vértices dun polígono regular de $2n$ lados. Determinar o número de ternas A_i, A_j, A_k tales que o triángulo $A_iA_jA_k$ é rectángulo e o número de ternas tales que o triángulo é acutángulo.

Non está permitido o uso de calculadoras.
Cada problema puntúase sobre 7 puntos.
O tempo de cada sesión é de 3 horas e media.