XLIX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase Galega

Primeira sesión

Sábado 12 de xaneiro de 2013

1 Dado un número enteiro n escrito no sistema de numeración decimal, formamos o número enteiro k restando do número formado polas tres últimas cifras de n o número formado polas cifras anteriores restantes. Demostrar que n é divisible por 7, 11 ou 13 se e só se k tamén o é.

2 Proba que as sumas das primeiras, segundas e terceiras potencias das raíces do polinomio $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ valen o mesmo.

3 Nunha sala de baile hai 15 mozos e 15 mozas dispostos en dúas filas paralelas de maneira que se formarán 15 parellas de baile. Sucede que a diferencia de altura entre o mozo e a moza de cada parella non supera os 10 cm. Demostrar que se colocamos os mesmos mozos e mozas en dúas filas paralelas en orden crecente de alturas, tamén sucederá que a diferencia de alturas entre os membros das novas parellas así formadas non superarán os 10 cm.

Non está permitido o uso de calculadoras.
Cada problema puntúase sobre 7 puntos.
O tempo de cada sesión é de 3 horas e media.

XLIX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase Galega

Segunda sesión

Sábado 12 de xaneiro de 2013

4 Demostra que o producto dos dous mil trece primeros términos da sucesión

$$a_n = 1 + \frac{1}{n^3}$$

non chega a valer 3.

5 Resolve esta ecuación exponencial

$$2^x \cdot 3^{5^{-x}} + \frac{3^{5^x}}{2^x} = 6$$

6 Sexan A, B e C os vértices dun triángulo e P, Q e R os respectivos pés das bisectrices trazadas dende eses mesmos vértices. Sabendo que PQR é un triángulo rectángulo en P, pídeseche probar dúas cousas:

a) Que ABC ten que ser obtusángulo.

b) Que no cuadrilátero $ARPQ$, malia a non ser cíclico, a suma dos seus ángulos opostos é constante.

Non está permitido o uso de calculadoras.
Cada problema puntúase sobre 7 puntos.
O tempo de cada sesión é de 3 horas e media.