

L Olimpiada Matemática Española

Primeira Fase

Primeira sesión

Venres mañá, 17 de xaneiro de 2014

1. Temos 50 fichas numeradas do 1 ao 50, e hai que coloralas de verde ou azul. Sabemos que a ficha 5 é de cor azul. Para a coloración das restantes fichas aplícanse as seguintes regras:

- a) Se a ficha co número x e a ficha co número y son de distinta color, entón a ficha co número $|x - y|$ píntase de cor verde.
- b) Se a ficha co número x e a ficha co número y son de distinta cor e $x \cdot y$ é un número entre 1 e 50 (ambos dous incluídos), entón a ficha co número $x \cdot y$ píntase de cor azul.

Determinar cantas coloracións diferentes se poden realizar no conxunto de fichas.

2. Determinar cantas solucións reais ten a ecuación

$$\sqrt{2 - x^2} = \sqrt[3]{3 - x^3}$$

3. Sexa $\triangle ABC$ un triángulo e D , E e F tres puntos calquera sobre os lados AB , BC e CA respectivamente. Chamémoslle P ao punto medio de AE , Q ao punto medio de BF e R ao punto medio de CD . Probar que a área do triángulo $\triangle PQR$ é a cuarta parte da área do triángulo $\triangle DEF$.

Non está permitido o uso de calculadoras.

Cada problema puntúase sobre 7 puntos.

O tempo de cada sesión é de 3 horas e media.

L Olimpiada Matemática Española

Primeira Fase

Segunda sesión

Venres tarde, 17 de xaneiro de 2014

4. Considérase un polígono regular de 90 vértices, numerados ao chou do 1 ao 90. Probar que sempre podemos encontrar dous vértices consecutivos cuxo produto é maior ou igual que 2014.

5. Determinar as solucións enteiras da ecuación

$$x^4 + y^4 = 3x^3y$$

6. Probar que

$$2014^{2013} - 1013^{2013} - 1001^{2013}$$

é múltiplo de

$$2014^3 - 1013^3 - 1001^3$$

Non está permitido o uso de calculadoras.
Cada problema puntúase sobre 7 puntos.
O tempo de cada sesión é de 3 horas e media.