LI Olimpada Matemática Española

Primeira sesión

Venres mañá, 16 de xaneiro de 2015

1. Demostra que
$$(ax+by)^2 \leq ax^2 + by^2$$
para calquera $x, y \in \mathbb{R}$ e calquera $a, b \in \mathbb{R}$ con $a+b=1, a, b \geq 0$. En qué casos se dá a igualdade?

2. Sexan r e s dúas rectas paralelas, e A un punto fixo a igual distancia de ambas dúas rectas. Para cada punto B da recta r, sexa C o punto da recta s tal que $\widehat{BAC} = 90°$, e sexa P o pé da perpendicular dende A sobre a recta BC. Demostra que, independentemente do punto B que tomemos da recta r, o punto P está sobre unha circunferencia fixa.

3. Un campionato de baloncesto xógase polo sistema de liga a dúas voltas (cada par de equipos enfróntanse dúas veces) e sen empate (se o partido remata en empate hai prórrogas ata que gañe un dos dous). O gañador do partido obtén 2 puntos e o perdedor 1 punto. Á final do campionato, a suma dos puntos obtidos por todos os equipos salvo o campión é de 2015 puntos. Cántos partidos gañou o campión?

Non está permitido o uso de calculadoras.
Cada problema puntúase sobre 7 puntos.
O tempo de cada sesión é de 3 horas e media.

LI Olimpada Matemática Española

Segunda sesión

Venres tarde, 16 de xaneiro de 2015

4. Os enteiros positivos x, y, z cumplen

$$x + 2y = z\,, \qquad x^2 - 4y^2 + z^2 = 310$$

Determina todos os posibles valores do producto xyz.

5. Nunha recta temos catro puntos A, B, C e D, nesa orde, de forma que $AB = CD$. O punto E é un punto fóra da recta tal que $CE = DE$. Demostra que

$$\widehat{CED} = 2\widehat{AEB}$$

se e só se $AC = EC$.

6. Determina todas as ternas de números reais positivos (x, y, z) que cumplan o sistema

$$\begin{cases} 2x\sqrt{x+1} - y(y+1) = 1 \\ 2y\sqrt{y+1} - z(z+1) = 1 \\ 2z\sqrt{z+1} - x(x+1) = 1 \end{cases}$$

Non está permitido o uso de calculadoras.
Cada problema puntúase sobre 7 puntos.
O tempo de cada sesión é de 3 horas e media.