LIII Olimpíada Matemática Española

Fase Galega

Primeira sesión

Venres mañá, 13 de xaneiro de 2017

1. Sexa E unha elipse e consideremos tres rectas paralelas r_1, r_2 e r_3, cada unha das cales corta a E en dous puntos distintos. Sexan estes puntos A_1, B_1, A_2, B_2 e A_3, B_3, respectivamente. Probar que os puntos medios dos segmentos A_1B_1, A_2B_2 e A_3B_3 están aliñados.

2. Sexa T un triángulo de ángulos α, β e γ. Para qué valores de α, β e γ o triángulo T se pode dividir en tres triángulos congruentes entre si?

3. Considerar a función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida como segue:

$$f(n) = \begin{cases} -f\left(\dfrac{n}{2}\right) & \text{se } n \text{ é par} \\ \\ f(n-1)+1 & \text{se } n \text{ é impar} \end{cases}$$

para $n \geq 0$. Demostrar que $f(n)$ é múltiplo de 3 se, e só se, n é múltiplo de 3. Determinar o menor número n que cumpre $f(n) = 2017$.

Non está permitido o uso de calculadoras.
Cada problema puntúase sobre 7 puntos.
O tempo de cada sesión é de 3 horas e media.

LIII Olimpíada Matemática Española

Fase Galega

Segunda sesión

Venres tarde, 13 de xaneiro de 2017

4. Describir todas as soluciones enteiras positivas (m, n) da ecuación

$$8m - 7 = n^2$$

e dar o primeiro valor de m (se existe) maior ca 1959.

5. Coloréanse os números $1, 2, \ldots, n$ de dúas cores, azul e verde. Probar que se $n = 2017$ existe unha coloración tal que a ecuación

$$8(x + y) = z$$

non ten solucións monocromáticas. Determinar o menor n para o que é imposible colorear os números de xeito que non haxa solucións monocromáticas.

6. Calcular o número máximo de raíces reais distintas que pode ter un polinomio P que verifique a seguinte propiedade: o producto de dúas raíces distintas de P é tamén unha raíz de P.

Non está permitido o uso de calculadoras.
Cada problema puntúase sobre 7 puntos.
O tempo de cada sesión é de 3 horas e media.

LIII Olimpíada Matemática Española

Fase Galega

Primeira sesión

Venres tarde, 13 de xaneiro de 2017

1. Describir todas las soluciones enteras positivas (m, n) de la ecuación

$$8m - 7 = n^2$$

y dar el primer valor de m (si existe) mayor que 1959.

2. Se colorean los números $1, 2, \ldots, n$ de dos colores, azul y rojo. Probar que si $n = 2017$ existe una coloración tal que la ecuación

$$8(x + y) = z$$

no tiene soluciones monocromáticas. Determinar el menor n para el que nunca es posible colorear los números de forma tal que no haya soluciones monocromáticas.

3. Calcular el número máximo de raíces reales distintas que puede tener un polinomio P que verifique la siguiente propiedad: el producto de dos raíces distintas de P sigue siendo una raíz de P.

Non está permitido o uso de calculadoras.
Cada problema puntúase sobre 7 puntos.
O tempo de cada sesión é de 3 horas e media.

LIII Olimpíada Matemática Española

Fase Galega

Segunda sesión

Sábado mañá, 14 de xaneiro de 2017

4. Encontrar todas las soluciones enteras positivas de

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b+c-2}=1$$

5. Probar que hay infinitos números primos cuyo resto al dividirlos entre 3 es 2.

6. En un triángulo acutángulo ABC consideramos su ortocentro, H. Sean A', B' y C' los simétricos de H con respecto a los lados BC, CA y AB, respectivamente. Probar que si los triángulos ABC y $A'B'C'$ tienen un ángulo igual, entonces también tienen un lado igual. ¿Es cierto el recíproco?

Non está permitido o uso de calculadoras.
Cada problema puntúase sobre 7 puntos.
O tempo de cada sesión é de 3 horas e media.

LIII Olimpíada Matemática Española

Fase Galega

Primeira sesión

Sábado mañá, 14 de xaneiro de 2017

1. Encontrar todas las soluciones enteras positivas de

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b+c-2} = 1$$

2. Probar que hay infinitos números primos cuyo resto al dividirlos entre 3 es 2.

3. En un triángulo acutángulo ABC consideramos su ortocentro, H. Sean A', B' y C' los simétricos de H con respecto a los lados BC, CA y AB, respectivamente. Probar que si los triángulos ABC y $A'B'C'$ tienen un ángulo igual, entonces también tienen un lado igual. ¿Es cierto el recíproco?

Non está permitido o uso de calculadoras.
Cada problema puntúase sobre 7 puntos.
O tempo de cada sesión é de 3 horas e media.

LIII Olimpíada Matemática Española

Fase Galega

Segunda sesión

Sábado tarde, 14 de xaneiro de 2017

4. Probar que dados $4n$ puntos en el espacio tridimensional, tales que no hay cuatro de ellos coplanarios, siempre se pueden formar n pirámides de base triangular de modo que no hay intersecciones entre ellas.

5. Hallar los valores enteros positivos de m para los que existe una función f del conjunto de los números enteros en sí mismo tal que $f^{(m)}(n) = n + 2017$, donde $f^{(m)}$ consiste en aplicar la función f m veces.

6. Determinar todos los números naturales n para los que existe algún número natural m con las siguientes propiedades

i) El número m tiene al menos dos cifras (en base 10), todas son distintas y ninguna es 0.

ii) El número m es múltiplo de n y cualquier reordenación de sus cifras da lugar a un múltiplo de n.

Non está permitido o uso de calculadoras.
Cada problema puntúase sobre 7 puntos.
O tempo de cada sesión é de 3 horas e media.