

LIV Olimpiáda Matemática Española

Primeira Fase

Primeira sesión

Vernes mañá, 19 de xaneiro de 2018

1. Sexan $a \geq 1$, $b \geq 1$ números naturais. Designamos por D e M o seu máximo común divisor e o seu mínimo común múltiplo, respectivamente.

Demostrar que

$$D^2 + M^2 \geq a^2 + b^2.$$

2. De cantas maneiras se pode escribir 111 como suma de tres números enteiros en progresión xeométrica?

3. Encontrar as funcións reais f , de variable real, que satisfán a ecuación funcional

$$f(x + f(x + y)) = f(2x) + y$$

calquera que sexan x, y reais.

Non está permitido o uso de calculadoras.

Cada problema puntúase sobre 7 puntos.

Transcorrida 1 hora e media, hai que entregar un problema.

A continuación, cada hora entregárase un novo problema.

LIV Olimpiáda Matemática Española

Primeira Fase

Segunda sesión

Vernes tarde, 19 de xaneiro de 2018

4. Determinar os números reais $x > 1$ para os que existe un triángulo con lados de lonxitudes

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1, \quad 2x^3 + x^2 + 2x + 1, \quad x^4 - 1$$

5. Sexa n un número natural. Probar que se a última cifra de 7^n é 3, a penúltima é 4.
6. Sexa AD a mediana dun triángulo ABC tal que $\angle ADB = 45^\circ$ y $\angle ACB = 30^\circ$. Determinar o valor de $\angle BAD$.

Non está permitido o uso de calculadoras.

Cada problema puntúase sobre 7 puntos.

Transcorrida 1 hora e media, hai que entregar un problema.

A continuación, cada hora entregárase un novo problema.