

LV Olimpiáda Matemática Española

Fase Galega

Primeira sesión

Venres mañá, 18 de xaneiro de 2019

1. Para cada número de catro cifras $\overline{abcd}$, denotamos por S o número $S = \overline{abcd} - \overline{dcba}$. Demostra que S é múltiplo de 37 se e só se as dúas cifras centrais do número $\overline{abcd}$ son iguais.

2. Demostra que para todo $n \geq 2$ podemos atopar n números reais

$$x_1, x_2, \dots, x_n \neq 1$$

de maneira que os produtos

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \quad \text{e} \quad \frac{1}{1-x_1} \cdot \frac{1}{1-x_2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{1-x_n}$$

son iguais.

3. O trapezio isósceles $ABCD$ ten lados paralelos AB e CD . Sabemos que $\overline{AB} = 6$, $\overline{AD} = 5$ e $\angle DAB = 60^\circ$. Lánzase un raio de luz dende A que rebota en CB no punto E e interseca a AD no punto F . Se $\overline{AF} = 3$, calcula a área do triángulo AFE .

Non está permitido o uso de calculadoras.

Cada problema puntúase sobre 7 puntos.

Transcorrida 1 hora e media, hai que entregar un problema.

A continuación, cada hora entregárase un novo problema.

LV Olimpiáda Matemática Española

Fase Galega

Segunda sesión

Venres tarde, 18 de xaneiro de 2019

4. Sexa $p \geq 3$ un número primo e consideramos o triángulo rectángulo de cateto maior $p^2 - 1$ e cateto menor $2p$. Inscribimos no triángulo un semicírculo cuxo diámetro descansa sobre o cateto maior do triángulo e que é tanxente á hipotenusa e mais ao cateto menor do triángulo. Determina os valores de p para os que o raio do semicírculo é un número enteiro.

5. Existen números naturais $m, n \geq 1$ de forma que

$$n^2 + 2018mn + 2019m + n - 2019m^2$$

sexa un número primo?

6. Fixamos un número natural $k \geq 1$. Determinar todos os polinomios $P(x)$ que cumplan

$$P(x^k) - P(kx) = x^k P(x)$$

para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.

Non está permitido o uso de calculadoras.

Cada problema puntúase sobre 7 puntos.

Transcorrida 1 hora e media, hai que entregar un problema.

A continuación, cada hora entregárase un novo problema.