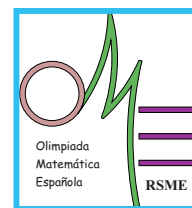




LIX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase local, curso 2022 - 2023



Mañá do venres 20 de xaneiro de 2023

Primeira sesión

Problema 1. Sexa n un enteiro positivo. Cada un dos números $1, 2, 3, \dots, 2023$ píntase dunha cor a escoller entre n distintas. Unha vez pintados, obsérvase que calquera par (a, b) , con $a < b$ de xeito que $a \mid b$, cumpre que a e b son de distinta cor. Encontrar o menor valor de n para o que esta situación é posible.

Problema 2. Sexa $n \geq 3$ un enteiro positivo. Os primeiros n enteiros positivos, $1, 2, \dots, n$, escríbense nunha pizarra. María realiza o seguinte proceso tantas veces como queira: primeiro elixe dous números na pizarra, e despois cámbiaos por aqueles que resultan de sumarlle a ambos dous un mesmo enteiro positivo. Determinar todos os enteiros positivos n para os que María pode conseguir, repetindo este proceso, que todos os números da pizarra sexan iguais.

Problema 3. Dicimos que unha terna de números reais (a, b, c) , todos distintos de cero, é *local* se

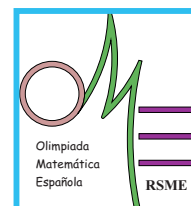
$$\begin{aligned}a^2 + a &= b^2 \\b^2 + b &= c^2 \\c^2 + c &= a^2.\end{aligned}$$

- (a) Probar que se (a, b, c) é local, entón $(a - b)(b - c)(c - a) = 1$.
- (b) Sexa $A_1 A_2 \dots A_9$ un eneágono regular (polígono regular de 9 lados). Supoñamos que $|A_1 A_4| = 1$, e sexa $|A_1 A_2| = a$, $|A_1 A_3| = b$ e $|A_1 A_5| = -c$. Probar que (a, b, c) é local.



LIX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase local, curso 2022 - 2023



Tarde do venres 20 de xaneiro de 2023

Segunda sesión

Problema 4. Consideremos un paralelogramo $ABCD$. Unha circunferencia Γ que pasa polo punto A corta aos lados AB e AD por segunda vez nos puntos E e F , respectivamente, e á diagonal AC no punto G . A prolongación da recta FG corta ao lado BC en H , e a prolongación de EG corta ao lado CD en I . Demostrar que a recta HI é paralela a EF .

Problema 5. Os inversos dos números enteiros positivos de 2 a 2023 escríbense nunha pizarra. En cada paso, selecciónanse dous números x e y e reemplázanse polo número

$$\frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}.$$

Este proceso repíte 2021 veces, ata que só quede un número. Cales poden ser os posibles números que se obteñan?

Problema 6. Encontrar todos os enteiros positivos $a, b, c \geq 1$ que satisfán

$$2^a + 7^b = c^2 + 4.$$