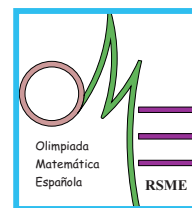




LX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase Galega, curso 2023 - 2024



Mañá do venres 19 de xaneiro de 2024

Primeira sesión

Problema 1. Determinar o menor número enteiro positivo n tal que a suma dos n termos

$$A(n) = 1 + 11 + 111 + \cdots + 11 \dots 11$$

sexa divisible por 45.

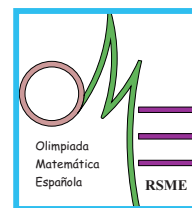
Problema 2. Sexa $P(x)$ un polinomio de grao 5 e sexan a e b dous números reais diferentes de 0. Supoñamos que o resto de $P(x)$ ao dividilo por $x^3 + ax + b$ é igual ao resto de $P(x)$ ao dividilo por $x^3 + ax^2 + b$. Determinar o valor de $a + b$.

Problema 3. Dado un n -ágono regular, tomamos tódolos posibles segmentos que unan dous vértices distintos. Se para cada un destes segmentos consideramos o seu punto medio, cantos puntos medios diferentes obtemos?



LX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase Galega, curso 2023 - 2024



Tarde do venres 19 de xaneiro de 2024

Segunda sesión

Problema 4. Sexa $ABCD$ un trapecio de bases AB e CD tal que $AD = DC = CB = 5$ e $AB = 10$. Sexa O o punto de intersección das diagonais AC e BD . A recta perpendicular a AC trazada por O corta á prolongación do lado AD en E e á base AB en F . Calcular a área do cuadrilátero $AECF$.

Problema 5. Nunha festa hai 100 persoas. Cada par de persoas, ou ben son *amigos*, ou ben son *inimigos* (unha e só unha das dúas cousas). Cúmrese a seguinte propiedade: se A e B son inimigos e B e C son inimigos, entón A e C son amigos. Demostrar que hai dúas persoas X e Y que son amigos e que teñen exactamente o mesmo número de inimigos.

Problema 6. Sexan $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tres números enteiros e sexa $p \geq 5$ un número primo. Demostrar que se $an^2 + bn + c$ é o cadrado dun número enteiro para $2p - 1$ valores consecutivos de n , entón $b^2 - 4ac$ é un múltiplo de p .