XVI Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria 2013

1. **(3 puntos)** Una ciudad X tiene 2013 personas. Cuando se ordena a las personas de manera creciente por la cantidad de dinero que tienen, la $n-$ésima persona tiene n veces la cantidad de dinero que tiene la más pobre. En cierto momento específico, todos los ciudadanos de X deciden hacer lo siguiente: cada quien reparte equitativamente la mayor parte posible de su riqueza entre todos los ciudadanos de X y da lo que sobre a la ciudad vecina Y.

   Sabemos que a la cantidad de dinero de la persona más pobre de X ni 3, ni 11, ni 61 la dividen. Determina la cantidad de dinero total que se dio a la ciudad Y.

2. **(4 puntos)** Sea V un espacio vectorial de dimensión infinita con producto interior y $S \subseteq V$ un subespacio no trivial de dimension infinita. Sea $x \in V \setminus S$ y W el espacio generado por x. Determina la dimensión de $(S \oplus W) \cap S^{\perp}$.

3. **(4 puntos)** Consideremos el número

$$\alpha = 0{,}123456789101112\ldots$$

   formado por escribir uno tras otro todos los enteros positivos después del punto decimal.

   Muestra que para todo entero positivo k tenemos que el conjunto

$$A_k := \{10^{nk}\alpha - \left\lfloor 10^{nk}\alpha \right\rfloor : n \in \mathbb{N}\}$$

   es denso en $[0, 1]$.

   Nota: $\lfloor x \rfloor$ denota al mayor entero menor o igual que x. En algunos países, en lugar de "punto decimal" se utiliza "coma decimal".

4. **(5 puntos)** Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia con centro O_1 y radio R, y circunscrito en otra circunferencia con centro O_2 y radio r. Muestra que

$$(O_1O_2)^2 = R^2 - 2rR + r(2r - r_1 - r_2)$$

   donde r_1 y r_2 son los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos ABC y ADC, respectivamente.

5. **(5 puntos)** Los elementos de un grupo finito conmutativo G con $|G| = N$ se colorean con tres colores, amarillo, azul y rojo, tal que cada color se utiliza a lo más $N/2$ veces.

   Sea A el conjunto de todas las 4-tuplas (ordenadas) $(x, y, z, w) \in G^4$, tales que $xyzw = e$ y x, y, z, w tienen el mismo color. Análogamente, sea B el conjunto de todas las 4-tuplas (ordenadas) $(x, y, z, w) \in G^4$ tales que $xyzw = e$, los elementos x, y tienen el mismo color, y z y w también tienen el mismo color, pero los dos colores son distintos. Demuestra que $|A| \leq |B|$.

6. **(6 puntos)** Una función real $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es acotada y diferenciable. Además, satisface la relación

$$f(x)f'(x) \geq \sin(x).$$

   ¿Existe $\lim_{x\to\infty} f(x)$?

7. **(8 puntos)** Antonio y Bella juegan el siguiente juego: Antonio escoge un entero positivo k y después Bella un segundo entero positivo n. Empezando por Antonio, ellos colocan alternadamente puntos en el plano (cada uno diferente a todos los anteriores) hasta que cada uno haya puesto n puntos. Bella gana si el número de rectas que pasan por al menos dos puntos de los colocados es divisible por k. En caso contrario gana Antonio. ¿Qué jugador tiene estrategia ganadora?