XVII Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria 2014

1. **(3 puntos)** Sean n y k enteros positivos tales que $k \leq n$. ¿De cuántas formas se pueden elegir k intervalos de enteros en el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ de modo que la intersección de cualesquiera dos de ellos sea vacía?

   Nota: Un *intervalo de enteros* es un conjunto de uno o más enteros consecutivos.

2. **(4 puntos)** Sea n un entero positivo y sea C un disco cerrado en $\mathbb{R}^2$ de área mayor que n. Demuestra que existe una traslación de C que contenga por lo menos $n+1$ puntos (a, b) con coordenadas $a, b \in \mathbb{Z}$.

3. **(4 puntos)** Se escriben todas las fracciones $\frac{p}{q}$ con $0 \leq p \leq q$ en una sucesión de la siguiente forma:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ldots$$

   Alrededor de cada fracción $\frac{p}{q}$ construimos un intervalo abierto de longitud $2^{-(k(p,q)+1)}$ centrado en $\frac{p}{q}$, donde $k(p,q)$ es el puesto que corresponde a la fracción $\frac{p}{q}$ en la sucesión. Muestra que $\frac{1}{\sqrt{2}}$ no pertenece a la unión de los intervalos.

4. **(5 puntos)** Sea n un entero mayor o igual a 3. Tomemos los números complejos $a_k = k + i\sqrt{k^2 - 1}$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. Sea $p(x)$ el polinomio $(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$. Muestra que

$$\lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{p'(x)}\, dx = 0.$$

   .

5. **(5 puntos)** Muestra que existe una función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ infinitamente diferenciable con derivadas continuas en $[0, 1]$ tal que para cualquier función $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua en $[0, 1]$ y cualquier $\epsilon > 0$ existe un número N y números reales $a_0, a_1, \ldots, a_N$ tales que

$$\int_0^1 \left(g(x) - \sum_{i=0}^{N} a_i f^{(i)}(x) \right)^2 dx < \epsilon.$$

   Nota: Aquí $f^{(i)}$ denota la $i-$ésima derivada de f si $i > 0$ y $f^{(0)} = f$.

6. **(6 puntos)** Sean a, b, c números reales positivos distintos. Definimos $L(a, b, c)$ como

$$\frac{2a}{(\log a - \log b)(\log a - \log c)} + \frac{2b}{(\log b - \log c)(\log b - \log a)} + \frac{2c}{(\log c - \log a)(\log c - \log b)}.$$

Prueba que

$$\sqrt[3]{abc} \leq L(a, b, c) \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

Nota: A $L(a, b, c)$ se le conoce como la *media logarítmica* de los números a, b, c.

7. **(7 puntos)** Sea q una potencia de un primo impar p. Sea $\mathbb{F}_q$ el campo finito de orden q y $GL_2(q)$ el conjunto de matrices invertibles de 2×2 con entradas en $\mathbb{F}_q$. Si $M \in GL_2(q)$, entonces definimos el *orden* de M como el menor entero positivo k tal que $M^k = I$, la matriz identidad. Prueba que

   a) Si $\det(M) = 1$, entonces el orden de M divide a $q - 1$, a $q + 1$ o a $2p$.

   b) Si t es un entero positivo que divide a $q - 1$, a $q + 1$ o a $2p$, entonces existe $M \in GL_2(q)$ tal que $\det(M) = 1$ y el orden de M es t.