XX Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria 2017

1. (3 puntos). Sea $n \geq 1$ y sean $k_0, \ldots, k_{n+1}$ enteros positivos. Demostrar que existen enteros $m_1, \ldots, m_n$ tales que

$$mcd(k_0,\ \ldots,\ k_{n+1}) = mcd(k_0 + m_1 k_1 + \ldots + m_n k_n,\ k_{n+1}).$$

   Nota: mcd denota el máximo común divisor.

2. (3 puntos). Sea $S = \{1, 2, 3, \ldots, 2017\}$. Un jardinero siembra césped en S de la siguiente forma: cada día el jardinero puede plantar césped en un solo elemento de S cualquiera, además si el número i está cubierto de césped, al día siguiente este césped se habra extendido y cubrirá los números $i-1$, i, e $i+1$ (Siempre y cuando los índices correspondientes estén en S). Determinar la menor cantidad de días que necesita el jardinero para lograr cubrir todo S de césped.

3. (4 puntos). Sean P, Q, R puntos alineados en el plano, con Q estrictamente entre P y R, distinto del punto medio de P y R. Sea $\mathcal{H}$ la rama de la hipérbola, con focos P y R, que pasa por Q. Determinar el lugar geométrico de los incentros de los triángulos HPR al variar el punto H sobre $\mathcal{H} - \{Q\}$.
   Nota: El incentro de un triángulo es el centro de su círculo inscrito.

4. (5 puntos). Determinar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen $f(x)f(y) = f(x+y)$ y $f(x) \geq 1 + x$, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

5. (6 puntos). Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales acotada. Para $\{x_{n_k}\}$ y $\{x_{m_k}\}$ dos subsucesiones, definimos la relación de equivalencia $\{x_{n_k}\} \sim \{x_{m_k}\}$, si $\lim_{k\to\infty}(x_{n_k} - x_{m_k}) = 0$. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de clases de equivalencias. Probar que $|\mathcal{C}| = 1$ o $\mathcal{C}$ es no numerable.

6. (7 puntos). Sea K un cuerpo finito, $K \neq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, y considere los conjuntos $A = \{a^2 : a \in K\}$, $B = \{b^4 : b \in K\}$. Demostrar que todo elemento de K se puede escribir como suma de un elemento de A y otro de B.

7. (7 puntos). Sean $a < b < c < d$ números reales tales que

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x-a| \cdot |x-b| \cdot |x-c| \cdot |x-d|}}.$$

Demostrar que

$$\int_a^b f = \int_c^d f.$$