XXII Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria 2019

1. (3 puntos). Una hormiga camina sobre la superficie de un octaedro regular. Durante cada minuto, la hormiga se desplaza con la misma probabilidad a alguna de las caras adyacentes a la cara en la que se encuentra. Si la hormiga emipeza en la cara F ¿Cuál es la probabilidad que vuelva a estar en la misma cara F después de n minutos?

2. (4 puntos). Demostrar que el conjunto $\{\sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon_n/n^2 : \varepsilon_n \in \{0,1\}\}$ es un intervalo.

3. (4 puntos). Sean r, s reales positivos tales que $2 < \frac{r}{s}$. Demostrar que la desigualdad

$$\frac{a^r - b^r}{a^s - b^s} + \frac{b^r - c^r}{b^s - c^s} + \frac{c^r - a^r}{c^s - a^s} \leq \frac{r}{s}(a^{r-s} + b^{r-s} + c^{r-s}),$$

es válida para cualesquiera reales positivos distintos a, b, c.

4. (5 puntos). Sean $n > m > 0$ enteros primos relativos, pruebe que el polinomio

$$Q\left(x\right) = mx^n - nx^m + n - m$$

tiene exactamente $m - 1$ raices dentro del círculo unitario.

5. (6 puntos). Sea $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ la función tal que $\sigma(1) = 1$, $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$ para cualesquiera m, n enteros positivos y, si $p_1 = 2 < p_2 = 3 < p_3 = 5 < ...$ son los primos listados em orden creciente, entonces $\sigma(p_k) = p_{k+1}$, para todo $k \geq 1$. Determine el supremo del conjunto $Y = \{\alpha > 0 |$ existen infinitos $n \geq 1$ tales que $\sigma(n) \geq n^\alpha\}$.

6. (7 puntos) Sea C una circunferencia de radio 1. Si A_1, A_2, A_3 son tres puntos en el interior del disco cuya frontera es C, definimos las transformaciones $T_i : C \to C$ para $i = 1, 2, 3$, como $T_i(P)$ es el punto donde la recta $\overline{PA_i}$ vuelve a intersecar al círculo C. Demostrar que la transformación $T = T_3 \circ T_2 \circ T_1$ tiene exactamente 0, 1 ó 2 puntos fijos.

7. (7 puntos). Dados un entero positivo n y una sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de enteros positivos, definimos
$K(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ recursivamente por:

- Para $n = 0$: $K() = 1$.
- Para $n = 1$: $K(a_1) = a_1$.
- Para $n \geq 2$: $K(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_n \cdot K(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) + K(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$.

Así, por ejemplo, $K(a_1, a_2) = a_2 \cdot K(a_1) + K() = a_2 \cdot a_1 + 1$.

Decimos que un entero positivo m es *sólido* si existen un entero positivo n y una sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_n$ con uno de sus términos igual a 2 y los otros $n-1$ iguales a 1 tales que $m = K(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Por ejemplo, $K(1, 2, 1) = 1 \cdot K(2, 1) + K(1) = 2 \cdot 1 + 1 + 1 = 4$ es sólido. Sea S el conjunto de los enteros positivos sólidos.

(i) Pruebe que existen enteros positivos m arbitrariamente grandes tales que $S \cap [m, 4m/3] = \emptyset$.

(ii) Pruebe que existen enteros positivos m arbitrariamente grandes tales que $|S \cap [m, 4m/3]| \geq \log m$.

Obs.: En (ii), log denota el logaritmo natural.